



ТАРТУСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РУКОВОДСТВО К ПРАКТИКУМУ ПО МЕХАНИКЕ

I

ТАРТУ 1990

ТАРТУСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра общей физики

РУКОВОДСТВО К ПРАКТИКУМУ ПО МЕХАНИКЕ

I

Составитель: Э. Тамм

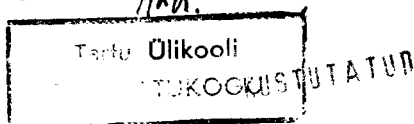
Перевод с эстонского О. Манкин

Тарту 1990

Утверждено на заседании совета физико-химического факультета
ТУ 16 ноября 1988 года.

Содержание

Предисловие	3
0. Об измерениях и обработке данных	5
0.1. Об измерении времени и периода колебаний	5
0.2. Об оценке случайной погрешности однократного измерения	8
0.3. О методе наименьших квадратов при графической обработке данных	8
1. Проверка законов кинематики и динамики поступательного движения с ускорением на машине Атвуда	12
2. Изучение движения в поле тяжести стробоскопическим методом	21
3. Определение скорости полета пули баллистическим методом	35
4. Определение скорости полета пули методом вращающихся дисков	48
5. Определение коэффициента восстановления и времени соударения упругих тел	53
6. Изучение законов динамики вращательного движения с помощью крестового маятника	63
7. Определение момента инерции с помощью трифилярного подвеса	72
8. Изучение прецессии гироскопа	84
9. Определение коэффициента Пуассона через модуль упругости и модуль сдвига	95
10. Изучение деформации растяжения	III
11. Изучение свободных колебаний пружинного маятника	121
12. Определение ускорения силы тяжести с помощью физического маятника	128
13. Исследование вынужденных колебаний с помощью крутильного маятника Поля	143



Предисловие

Руководства к лабораторным работам по механике на русском языке опубликованы последний раз в 1970 году в виде сборника под названием "Физический практикум" I. После этого и оборудование лабораторий и руководства к практическим работам значительно дополнены. В настоящий сборник включены такие руководства, переработка которых условно (на некоторое время) закончена. Руководства к остальным работам будут опубликованы во второй части сборника.

Настоящий сборник является переводом сборника руководств на эстонском языке, опубликованного в 1988 году.

Модернизация практикума по механике происходила в основном в направлении автоматизации измерений (особенно измерения времени) и обработки данных. Электронные секундомеры, изготовленные студентом Р. Метсунтом в результате его курсовой и дипломной работ, применяются во многих работах либо в комплексе с фотоэлектрическими датчиками, либо вместо механических ручных секундомеров. В одной работе (№ I) используется для измерения времени и записи результатов программируемый калькулятор (автор А. Виссель). Автоматическую установку для измерения времени в работе № 6 построил студент И. Пейль. В модернизации лабораторного оборудования и разработке некоторых практических работ участвовали и дали существенный вклад работники кафедры М. Фишер (работа № 2), Э. Пяртель (№ 13), Э. Круль (№№ I и 3), П. Парис (№№ I и 13), А. Виссель (№№ I, 7 и 10) и студенты А. Дуик (№ 2) и Т. Виссель (№ 2). При составлении программ обработки данных основную работу выполнили О. Теллер, составитель настоящего сборника и студенты М. Люси, А. Пязок, К. Каск.

При переработке руководств основное внимание обраща-

лось на обучение студентов методам обработки данных и развитие у них самостоятельного мышления. Надежды на достижение последней цели возлагаются в частности на дополнительные задания к работам. Дополнительные задания до практикума предполагаются как обязательные для всех студентов, тогда как задания после практикума должны выполняться по выбору преподавателя. В руководствах делается много ссылок на литературу с целью обучения студентов работе с книгой.

Выражаю благодарность всем, кто принимал участие в работе по модернизации и усовершенствованию практических работ, а также Э. Пяртель за выполнение чертежей и рисунков и Л. Таррасте за всю машинописную работу, выполненную ей при издании настоящего сборника. Особую благодарность выражаю О. Манкин за перевод сборника и сделанные при этом весьма ценные замечания по содержанию руководств.

Все замечания и пожелания, касающиеся сборника, прошу адресовать на кафедру общей физики Тартуского университета.

Составитель

О. ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ И ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ

О.І. Об измерении времени и периода колебаний

Для измерения времени в физическом практикуме пользуются механическими, электрическими (вибрационные или синхронные) и электронными секундомерами. Секундомеры всех трех типов могут использоваться как ручной секундомер. В этом случае секундомер пускают и останавливают вручную согласно сигналам, принятым органами чувств экспериментатора. Электрические и электронные секундомеры используются в большинстве случаев как автоматические приборы – их пуск и остановка происходят по электрическим сигналам, поступающим от соответствующих датчиков (механические контакты, электромагнитные или фотореле и т.п.).

Погрешности при измерении времени можно по их происхождению разделить на три типа. Во-первых, погрешность, происходящая от нестабильности периодического процесса (колебание балансира, периодическое изменение напряжения сети, колебания кварцевого резонатора), являющегося основой работы секундомера; во-вторых, погрешность реакции, обусловленная несовершенством установок, включающих и выключающих секундомер (в том числе и человека, если это осуществляется вручную) – между моментом получения сигнала и реальным включением или выключением появляется случайный промежуток времени – время реакции; в-третьих, т.н. погрешность дискретизации, появляющаяся при неизбежном округлении показания секундомера.

Допустимые погрешности, приведенные в книге [І, таблица І6.9] для механических секундомеров, включают погрешности, появляющиеся в результате всех трех перечисленных причин. Из погрешностей реакции учтены, конечно, только те, которые обусловлены механизмом включения самого секундомера. К ним надо прибавить погрешность реакции измерителя (чело-

века), которую следует определить опытным путем (см. ниже).

В случае синхронных и вибрационных секундомеров, питаемых от сети переменного тока, вычисляют абсолютную погрешность измеряемых промежутков времени по формуле [3, п. I2.3.3]:

$$\Delta t = \Delta^0 t + E_f t + \Delta^2 t. \quad (0.1)$$

В этой формуле допустимая основная погрешность $\Delta^0 t$ учитывает собственную погрешность реакции секундомера и погрешность дискретизации, она дается в паспорте секундомера (для секундомеров, используемых в практикуме, можно $\Delta^0 t$ найти и в книге [2, п. I3]). E_f — относительная погрешность частоты питающего секундомер напряжения (обычно напряжения сети), она определяется допустимой относительной предельной погрешностью прибора для измерения частоты. При этом учитывается, что показание секундомера t' исправлено по измеренной частоте f (секундомер рассчитан на частоту 50 Гц):

$$t = t' \frac{50}{f}. \quad (0.2)$$

Если частоту f не измеряют, то E_f вычисляется по допустимой погрешности частоты сети переменного тока. ГОСТ I3109-67 определяет для промежутка времени в 10 мин среднее отклонение частоты от 50 Гц равным 0,1 Гц, для более коротких промежутков амплитуда колебаний не должна превышать 0,2 Гц. Таким образом, для промежутков времени $t \geq 10$ мин $E_f = 0,002$, а для более коротких промежутков времени — 0,004. $\Delta^2 t$ — погрешность реакции экспериментатора или автоматической установки, включающей и выключающей секундомер.

В электронных секундомерах с кварцевым резонатором циферблат заменен номерным табло. Погрешность первого типа (нестабильность частоты кварцевого резонатора) обычно не превышает 10^{-5} , более точные данные приведены в паспорте секундомера. Погрешность измерения определяется здесь в основном погрешностью дискретизации, равной единице младшего разряда табло. И, конечно, сюда следует прибавить еще погрешность реакции экспериментатора или автомата, включающего и выключающего секундомер.

Погрешность реакции как экспериментатора, так и автоматической установки обусловлена тем, что время реакции является случайной величиной, поэтому разность времен реакции пуска и остановки секундомера не равна нулю, она тоже является случайной величиной. В сборнике руководств [3, п. I.6] описан простой метод измерения стандартного отклонения разности двух времен реакции Δt , обусловленного разбросом времен реакции экспериментатора. Предполагая, что разброс разности двух времен реакции подчиняется нормальному распределению, на уровне доверительной вероятности 95 % при однократном измерении получается оценка погрешности реакции

$$\Delta^2 t \approx 2 \Delta t. \quad (0.3)$$

Для оценки погрешности реакции автоматической установки включения секундомера надо каким-нибудь способом измерить время ее реакции n раз и затем вычислить Δt по указанному выше руководству. В случае использования фотореле можно погрешность реакции наряду с другими компонентами погрешности не учитывать.

Как это видно из вышесказанного, абсолютная предельная погрешность в большинстве случаев не зависит от длительности измеряемого времени, или эта зависимость очень слаба. (Исключение составляет случай с секундомерами, питаемыми от сети переменного тока.) Таким образом выходит, что более длинные промежутки времени можно измерять точнее. Это позволяет значительно увеличить точность измерения периода колебаний, определяя суммарное время достаточно большого числа N колебаний. Бесконечное увеличение числа N , однако, бессмысленно, особенно если среди компонентов абсолютной предельной погрешности имеются члены, прямо пропорциональные измеряемому промежутку времени, как, например, в формуле (0.1). Определение нужного числа колебаний N является типичной задачей планирования измерений, в руководствах при необходимости приводятся конкретные указания к ее решению.

Погрешность реакции случайна. Если она является существенным компонентом погрешности, то для ее оценки следует и измерения периода колебаний делать повторно. Обычно в таких

случаях проводят некоторую серию измерений при малых значениях N и из результатов вычисляют случайную погрешность единичного результата (см. п. 02). Ее используют при планировании дальнейших измерений.

0.2. Об оценке случайной погрешности однократного измерения

Информацию о случайной погрешности можно получить только через статистическую обработку результатов повторных измерений. Если же некоторую физическую величину измеряют в различных объектах или ее разные значения в одном объекте с помощью одних и тех же измерительных приборов и по одной и той же методике, то нецелесообразно делать каждый раз повторные измерения. В таком случае делают длинную серию измерений одного произвольного значения величины (объем $n \geq 10$) и из результатов этой серии вычисляют оценку δ_x стандартного отклонения σ_x единичного результата [2, формула (4.5)]. В дальнейшем значения этой величины измеряют однократно. Предполагая (опираясь на гипотезу нормального распределения [1, п. 28.8]), что результаты измерений (но тогда и их случайные погрешности) подчиняются, по крайней мере приближенно, нормальному распределению, можно построить оценку случайной предельной погрешности единичного результата на выбранном уровне доверительной вероятности ρ , пользуясь величиной δ_x [2, с. 12-13]. Для этого надо δ_x умножить на коэффициент t_ρ , зависящий от уровня доверительной вероятности ρ (в руководстве [2] обозначение α). Например, при $\rho = 95\%$ $t_\rho = 2$; при $\rho = 99,7\%$ $t_\rho = 3$. Коэффициент t_ρ - квантиль стандартизированного нормального распределения [1, п. 27.6, 28.5]. Если почему-либо нужно выбрать уровень доверительной вероятности, отличный от приведенных в примере, можно значения квантиля t_ρ найти в таблицах стандартизированной функции нормального распределения, например [1, таблица 34.6.1].

0.3. О методе наименьших квадратов при графической обработке данных

Эксперимент в физике обычно означает изучение зависимости между величинами. Одну из величин как правило считают

независимой переменной, другие обусловлены либо изменением первой, либо сопровождают ее по каким-либо другим причинам. Результаты измерений образуют теперь множество пар значений аргумента (x) и функции (y) - двумерный массив. Если эти пары значений нанести в виде точек на плоскость в осях x, y , то через эти точки не всегда оказывается возможным провести "плавную" кривую (см. рис. 0.1). Причиной этого могут быть либо случайные погрешности измерений, либо обстоятельство, что одна из величин -- функция (а иногда и обе) -- изменяется в силу воздействия на нее многих причин, и значение ее при фиксированном значении аргумента оказывается случайным. В обоих случаях результат измерения функции является случайной величиной. Нередки случаи, когда и аргумент есть случайная величина, это существенно усложняет обработку данных. Если случайную погрешность измерения аргумента невозможно подавить, то обычно случайное ("неплавное") расположение экспериментальных точек на плоскости x, y считают "виной" функции, значения аргумента -- точно известными. Это обуславливает дополнительную методическую погрешность при обработке данных, но с ней мирятся.

В физическом практикуме как правило измеряют неслучайные величины. Поэтому для фиксированного значения аргумента существует соответствующее ему действительное значение функции. Наилучшей оценкой действительных значений является среднее арифметическое результатов измерений (по крайней мере, в случае случайной погрешности, подчиняющейся точно или приблизительно нормальному распределению). Если теперь при каждом фиксированном значении аргумента измерить значение функции достаточно большое число n раз и на плоскость нанести точки, отвечающие средним арифметическим этих значений, то через эти точки можно провести плавную кривую, которая и явится наилучшей оценкой исследуемой функции. Эту оценку называют регрессионной функцией.

Описанный метод оценки функции очень трудоемок, им не пользуются никогда. Можно доказать, что такой же результат дает метод наименьших квадратов [1, п. 30.9]. Если функция зависит от аргументов линейно

$$y = ax + b, \quad (0.4)$$

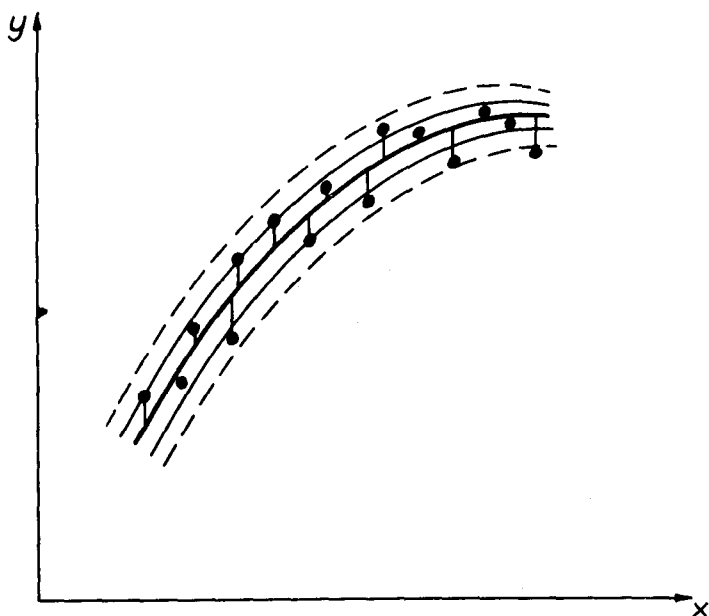


Рис. 0.1.

то нахождение параметров a и b и их предельных погрешностей, а также случайной предельной погрешности оценки функции y , вычисляемой по той же регрессионной формуле (0.4), аналитически относительно просто [1, п. 30.10, 39.3, 31.5; 2, п. 9]. Если же функция нелинейна и заменой переменных ее не удастся линеализовать [1, п. 39.6 – 39.8], то аналитическое определение постоянных в выражении, описывающем функцию, представляет собой сложную вычислительную задачу; кроме того, выражение это часто просто неизвестно. В таком случае можно ограничиться графической оценкой функции. Случайные погрешности на графике характеризуются коридором погрешностей, который строится по методу наименьших квадратов. Через множество точек в координатных осях x, y , представляющих результаты измерений, проводят на глаз регрессионную кривую [1, п. 39.2] так, чтобы по обе стороны этой кривой осталось приблизительно одинаковое количество точек. Согласно определению регрессионной функции, эта кривая дает сред-

нее значение функции y при любом значении аргумента x . После этого измеряют отклонения Δy_i экспериментальных точек от этой "средней" линии в направлении оси y (вертикальные отрезки на рис. 0.1) и вычисляют среднеквадратичное отклонение отдельной точки от регрессионной кривой

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2}{n-1}} \quad (0.5)$$

и среднюю квадратичную погрешность точек кривой

$$s_{\bar{y}} = \frac{s_y}{\sqrt{n}}. \quad (0.6)$$

Умножив $s_{\bar{y}}$ на коэффициент Стьюдента $t_{p, n-1}$ [1, п. 31.2, 31.3, 35.2; 2, п. 4] на выбранном уровне доверительной вероятности p , получают ширину коридора погрешностей. На рис. 0.1 коридор погрешностей изображен тонкой сплошной линией.

Полученный коридор погрешностей характеризует точность регрессионной кривой как оценки функции. Можно, однако, построить коридор, изображающий "допустимое" отклонение экспериментальных точек от кривой (пунктирная линия на рис. 0.1). Ширина этого коридора получается умножением s_y на квантиль стандартизированного нормального распределения t_p (см. п. 0.2). Если теперь некоторые точки окажутся вне этого коридора систематически по одну его сторону, то такая плавная кривая не является правильным отображением функции, функция имеет в этом месте искривление. Регрессионную кривую надо теперь исправить и конечно вычислить снова s_y и $s_{\bar{y}}$.

0.4. Литература

1. Tammet H. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Тин.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воодайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТГУ, 1987. - 60 с.
3. Руководство к практикуму по общим физическим измерениям. /Сост. Э. Тамм. - Тарту: ТГУ, 1983. - 196 с.

1. ПРОВЕРКА ЗАКОНОВ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С УСКОРЕНИЕМ НА МАШИНЕ АТВУДА

1.1. Задание

Проверка законов пути и скорости при равноускоренном движении и II закона Ньютона. Определение момента силы трения, действующего на ось блока.

1.2. Принадлежности

Машина Атвуда с основными и добавочными грузами, электромагнитом, сплошной и кольцевой платформами; установка для управления и измерения времени (блок управления с электронным секундомером, микрокалькулятор МК-64), аналитические весы.

1.3. Устройство и теория машины Атвуда

Основными деталями машины являются прикрепленный к стене вертикальный металлический стержень A (рис. 1.1), на который нанесена сантиметровая шкала, в верхнем конце стержня к нему прикреплен легкий алюминиевый блок B . С помощью специальных подшипников трение при вращении блока сведено до минимума. Через блок перекинута тонкая нить, на обоих концах которой висят грузы C и C' . Нижняя часть груза C' изготовлена из мягкой стали, поэтому этот груз может удерживаться в фиксированном положении электромагнитом M . Массы грузов C и C' можно увеличивать с помощью добавочных грузов D и E . К стержню A с помощью муфт прикрепляются платформы - кольцевая F и сплошная G - так, что их можно перемещать по вертикали. С помощью такой же муфты на стержне крепится и электромагнит M .

Если на груз C положить добавочный груз (перегрузок) D или E , то вся система придет в равноускоренное движение.

ние. Ускорение системы можно вычислить. Воспользовавшись II законом Ньютона и скалярным уравнением моментов, запишем уравнения движения грузов C и C' , а также блока в проекциях на вертикальную ось, направленную вниз, считая нить невесомой и нерастяжимой:

$$\left. \begin{aligned} (m + m_1) a &= (m + m_1) g - T_2, \\ -m a &= m g - T_1, \\ J \frac{a}{r} &= (T_2 - T_1) r - M_{\text{тр}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.I})$$

В этих уравнениях m — масса основного груза (C или C'), m_1 — масса добавочного груза (D или E), T_1 и T_2 — натяжения нитей на стороне груза C' и C соответственно, J и r — момент инерции блока относительно оси вращения и радиус блока соответственно, a и g — ускорение движения системы и ускорение силы тяжести, $M_{\text{тр}}$ — момент сил трения относительно оси вращения блока. Отношение $\frac{a}{g} = \varepsilon$ есть угловое ускорение блока в предположении, что нить на блоке не скользит. Все проекции векторов по своему абсолютному значению равны их модулям. Решив систему уравнений (I.I) получим:

$$a = \frac{m_1 g - \frac{M_{\text{тр}}}{r}}{2m + m_1 + \frac{J}{r^2}}. \quad (\text{I.2})$$

В полученной формуле можно считать массу нити входящей в суммарную массу $2m$ основных грузов. Постоянная прибора $2m$ и содержит как массу грузов C и C' , так и массу нити.

Итак, система грузов машины Атвуда начинает двигаться с постоянным ускорением $a < g$. Если во время движения снять добавочный груз, то система будет продолжать движение равномерно с той скоростью, какая была в момент удаления добавочного груза, если не считать маленького замедления, обусловленного силами трения. Добавочные грузы типа E можно снимать с помощью кольцевой платформы.

Исходя из вышесказанного, можно с помощью машины Атвуда проверить формулы кинематики равноускоренного движе-

ния (указанные в задании). Проверка основных законов динамики возможна в первом приближении без учета сил трения или в более точном приближении – с учетом заранее определенного момента сил трения. Для всего этого надо измерить длины путей s , s' и s'' (рис. I.1) с помощью шкалы на стержне A , а также промежутки времени t , t' и t'' , затраченные на прохождение этих путей грузом C , с помощью секундомера и автоматизированной системы измерения времени.

Блок-схема автоматизированной системы измерения времени приведена на рис. I.2. Электронный секундомер с кварцевым резонатором, находящийся в системе управления, позволяет измерять промежутки времени длительностью 0...10 с с точностью до 0.01 с. После включения блока управления в сеть секундомер работает непрерывно. Когда табло с тремя десятичными знаками (9,99 с) заполнится, отсчет времени начинается снова с нуля. Нажатием на кнопку START на некоторое время прерывается ток в обмотке электромагнита и в тот же момент секундомер занулевается. Код показания секундомера подается непрерывно на вход микрокалькулятора. С поступлением импульса из формирователя сигнала, управляющего калькулятором, этот код записывается в x -регистр калькулятора, откуда при надобности можно записать его в память калькулятора. Для измерения промежутков времени t'' и t к кольцевой платформе (рис. I.1) пристроен фотоkontakt K_F , а к платформе G – механический контакт K_G . Когда нижняя поверхность груза C достигает одного из этих контактов (добавочный груз E снимается в момент, когда нижняя поверхность груза C замыкает контакт K_F), формирователь управляющих сигналов дает импульс, и калькулятор фиксирует промежуток времени, прошедшего с момента, когда был прерван ток в обмотке электромагнита. Промежуток времени t' измеряется косвенно: $t' = t - t''$.

Электронный секундомер дает показания с постоянной допустимой абсолютной погрешностью (0,01 с), поэтому в целях большей точности измерений полезно измерять по возможности большие промежутки времени. Если желают записать t'' в память, то следует помнить, что калькулятору нужно для этого 0,8 с, поэтому надо, чтобы $t' > 0,8$ с, иначе t не будет зафиксировано. Из всего этого следует, что неразумно пользоваться

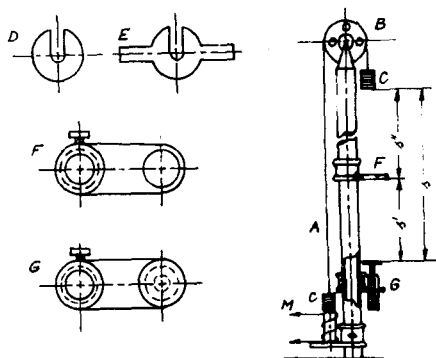


Рис. 1.1. Машина Атвуда.

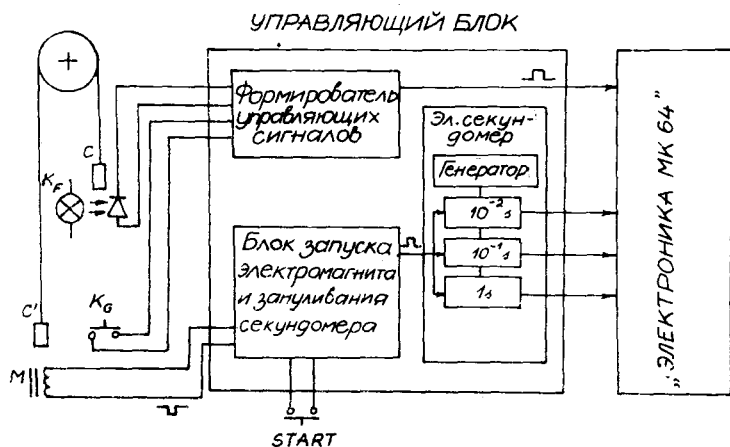


Рис. 1.2. Блок-схема автоматизированной системы измерения времени.

большими перегрузками. Выбирая добавочные грузы, надо следить, чтобы перегрузка с одной стороны блока не превышала 300 Н.

Инструментальная погрешность сантиметровой шкалы на стержне A не превышает 1 мм. При измерении длин l , l' и l'' может оказаться решающей субъективная погрешность от параллакса.

Масса основных грузов 2 кг , момент инерции блока J и его радиус r даются как постоянные установки. Приводятся также приближенные значения массы всех добавочных грузов.

1.4. Ход работы

1.4.1. Соединяют блок управления с калькулятором, включают приборы в сеть питания, вводят в калькулятор программу измерения и накопления согласно инструкции к установке. Проверяют работу измерительной системы, нажав на кнопку START блока управления и закрыв затем пальцем фотоконтакт K_F и механический контакт K_G . Калькулятор должен записать t'' и t .

1.4.2. Вследствие того, что точность электронного секундомера велика, предельная погрешность измерения времени определяется в основном случайной погрешностью, обусловленной неустойчивостью времени реакции контактов K_F и K_G ; чтобы не производить повторных опытов при каждой операции измерений, определяют сперва предельную случайную ошибку при однократном измерении промежутков времени t'' и t . Для этого производят 10...15 повторных измерений при произвольном положении обеих платформ и магнита и при произвольной добавочной нагрузке на основном грузе C (не забывая, однако, чтобы $t' > 0,8$ с!), записывая t'' и t в память и выписав их. Каждый отдельный опыт состоит в следующем: груз C' приводят в контакт с магнитом M , гасят колебания груза C (вместе с перегрузом), зануливают программный счетчик калькулятора, запускают программу и нажимают на кнопку START блока управления. Для обеих выборок вычисляют стандартное отклонение σ_t и $\sigma_{t''}$. Распределение времен реакции контактов как случайных величин близко к нормальному. Поэтому для нахождения предельной погрешности результата

однократного измерения t'' и t можно пользоваться таблицей квантилей стандартизированного нормального распределения [1, таблица 34.6.1]. Так, например, для нахождения погрешности на уровне доверительной вероятности 98 % надо значения $\hat{\sigma}_t$ и $\hat{\sigma}_{t''}$ умножить на 2,33.

I.4.3. Для проверки закона пути

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad (I.3)$$

переводят муфту закрепления магнита в столь низкое положение, сколько позволяет нить подвеса грузов C и C' , платформу G закрепляют в наинизшем возможном положении. Фиксируют положение нижней поверхности груза C и положение контакта K_G на шкале. Выбирают подходящий добавочный груз D из их набора, кладут его на груз C и измеряют время t . Опыт повторяют не менее 7...10 раз, поднимая платформу G каждый раз примерно на 20 см.

Результаты измерений вместе с предельными погрешностями наносят на график в осях t^2 , 24. Если через все кресты погрешностей можно провести прямую, то закон пути на выбранном уровне доверительной вероятности нашел подтверждение. Вычисляют крутизну полученной прямой, дающую значение ускорения в соответствующих единицах. Затем вычисляют предельную погрешность ускорения, пользуясь одним из методов, описанных в литературе [2, п. 9].

I.4.4. Проверка закона скорости

$$v = a t. \quad (I.4)$$

Мгновенную скорость груза C в момент удаления добавочного груза E можно измерить, считая движение после удаления груза E равномерным. Для этого надо измерить время t' , затраченное на прохождение пути s' . В данном случае увеличение t' не улучшает точности определения скорости, так как вследствие наличия трения скорость фактически уменьшается и методическая погрешность определения мгновенной скорости с увеличением s' и t' растет. Поэтому здесь приходится идти на компромисс, выбирая значение s' не очень большим, но и не очень маленьким.

Желательно расстояние между двумя платформами выбрать равным 60...80 см.

Платформу G закрепляют в наинизшем возможном положении, а кольцевую платформу F — на 60...80 см выше платформы G . Местоположение фотоконтакта K_F отмечено на его корпусе красным штрихом. На груз C кладут подходящий добавочный груз E . Измеряют t'' и t . Опыт повторяют 7...10 раз, перемещая платформы каждый раз на 10...15 см вверх, оставляя расстояние между ними неизменным. Каждый раз вычисляют мгновенную скорость $v = \frac{s'}{t'}$. Данные (s'', t'', t, s', t', v) оформляют в виде таблицы, по ним строят график в осях t'', v (с крестами погрешностей). Если через кресты погрешностей окажется возможным провести прямую, то это явится подтверждением закона скорости. Затем вычисляют ускорение и его предельную погрешность по правилу, приведенному в п. I.4.3.

I.4.5. Проверка II закона Ньютона $F = ma$. Добавочные грузы кладут на оба основных груза C и C' , но так, чтобы $m_{1c} > m_{1c'}$. В дальнейшем массу всей системы $M = 2m + m_{1c} + m_{1c'}$ оставляют неизменной, но изменяют силу F , приводящую систему в движение, перекладывая добавочные грузы с основного груза C' на груз C . В связи с этим будет изменяться ускорение системы:

$$F_1 = Ma_1, \quad F_2 = Ma_2.$$

Деление этих равенств дает

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Сила, действующая на тело в поле тяжести Земли, прямо пропорциональна его массе, поэтому можно отношение сил F_1 и F_2 записать через разность масс добавочных грузов:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{(m_{1c} - m_{1c'})_1}{(m_{1c} - m_{1c'})_2}.$$

Если в обоих опытах по измерению ускорения пути, пройденные

грузами, взятые одинаковыми, то

$$\frac{(m_{1c} - m_{1c'})_1}{(m_{1c} - m_{1c'})_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2}. \quad (I.5)$$

Если соотношение (I.5) в пределах погрешностей опытов выполняется, то это явится подтверждением II закона Ньютона в первом приближении, без учета трения.

Выбрав значение λ по возможности большим, измеряют времена t_1 и t_2 не менее 7...10 раз, вычисляют их средние значения и предельные погрешности. Разности масс $m_{1c} - m_{1c'}$ для обоих случаев определяют взвешиванием на аналитических весах и затем проверяют выполнение соотношения (I.5) в пределах погрешностей опыта.

Если соотношение (I.5) не выполняется, взвешивают использованные в п. I.4.3 добавочные грузы (на аналитических весах) и вычисляют по формуле (I.2) отношение $\frac{M_{mp}}{v}$, пользуясь найденными там значениями ускорений. Из формулы (I.2) получается соотношение

$$\frac{(m_{1c} - m_{1c'})_1 g - \frac{M_{mp}}{v}}{(m_{1c} - m_{1c'})_2 g - \frac{M_{mp}}{v}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2}. \quad (I.6)$$

Выполнение последнего соотношения в пределах погрешностей опыта является доказательством выполнимости II закона Ньютона и выведенного из него уравнения моментов.

I.4.6. Изучают устройство подшипников блока машины Атвуда и делают набросок блока и его подшипников.

I.5. Дополнительные задания

I.5.1. До практикума

А. Представить ход решения системы уравнений (I.1), найти выражение (I.2) ускорения системы, а также выражения для натяжения нитей T_1 и T_2 .

Б. Вывести формулы (I.3) и (I.4) из дифференциального уравнения $\ddot{x} = a = \text{const}$ движения, происходящего под действием постоянной силы.

В. Почему в п. I.4.3 и I.4.5 рекомендуется выбрать по возможности большее значение β ?

Г. В каких единицах следует измерять отрезки на осях графиков, отображающих результаты опытов в п. I.4.3 и I.4.4, при определении крутизны прямых?

I.5.2. После практикума

Д. Представить идею опытного определения момента инерции блока нашей машины Атвуда относительно его оси вращения.

Е. Представить идею опытного определения момента сил трения $M_{тр}$, исследуя движение на пути β' (между платформами, после удаления добавочного груза).

Ж. Суммарный момент сил, тормозящий движение в машине Атвуда, является результатом трения качения оси блока на ободе опорных колес, трения качения и вязкого трения осей опорных колес в смазанных шарикоподшипниках, трения скольжения оси блока в опоре на кернах. Как можно опытным путем установить, каков характер суммарного момента сил трения, т.е. является он результатом сил сухого трения (не зависящих от скорости) или сил вязкого трения (прямо пропорциональных скорости)?

I.6. Литература

1. Таммет Н. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Тln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воолайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТТУ, 1987. - 60 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1973. - I. - §§ 3-10, 14, 21, 38.
4. Физический практикум: Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И. Ивероновой. - М.: Наука, 1967. - Зад. 3.

2. ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ СТРОБОСКОПИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

2.1. Задание

I. Свободное падение.

Доказать, что: а) свободное падение является равномерно ускоренным движением, определить ускорение этого движения;
б) значение ускорения не зависит от размеров тела.

II. Движение по криволинейной траектории в поле тяжести Земли.

Доказать, что: а) движение в горизонтальном направлении равномерное, определить скорость этого движения;
б) в вертикальном направлении происходит свободное падение, определить ускорение этого движения;
в) траектория движения – парабола, определить начальную скорость на этой траектории.

III. Качение шарика по наклонной плоскости.

Определить, какая доля механической энергии превращается в теплоту.

2.2. Принадлежности

Стенд с электромагнитами, наклонным желобом и стробоскопическим осветителем, фотоаппарат, штатив для его укрепления, металлические шарики, штангенциркуль, установка для определения координат фотоснимков шарика на пленке, отвес, цифровой частотомер.

2.3. Теория метода

2.3.1. Вертикальное (свободное) падение. Шарик, падающий свободно без начальной скорости, фотографируют в мигающем свете (кратковременные световые импульсы повторяются через равные промежутки времени). По фотографии можно определить координаты центра падающего шарика в моменты, отвечающие световым импульсам, выбрав для этого соответствующим образом систему координат. Из результатов этих измерений можно установить характер движения и определить значение ускорения свободного падения. Выбор начала координат, а также начала отсчета времени произволен; одну из осей, например, ось y , целесообразно направить вдоль траектории центра масс шарика. В самом начале движения снимки шарика на фотопленке частично перекрываются. Выбрав $y_0 = 0$ и $t_0 = 0$ по одному из положений шарика, четко различаемых на пленке, можно моменты регистрации шарика выразить следующим образом:

$$t_k = k'T, \quad (2.1)$$

где T - период повторения световых импульсов, $k = 0, 1, 2, \dots$. Если движение шарика есть действительно свободное падение с ускорением g , то можно его координаты в моменты времени, данные формулой (2.1), выразить как

$$y_k = v_0 k'T + \frac{g}{2} k^2 T^2. \quad (2.2)$$

Разделив обе стороны последнего равенства на $k'T$, получим

$$\frac{y_k}{k'T} = v_0 + g \frac{k'T}{2}. \quad (2.3)$$

Сделаем замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_k &= \frac{y_k}{k'T} \\ \tilde{t}_k &= \frac{k'T}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

В новых переменных уравнение (2.3) примет вид:

$$\tilde{b}_\kappa = v_0 + g \tilde{\tau}_\kappa. \quad (2.5)$$

График функции $\tilde{b}_\kappa = \tilde{b}_\kappa(\tilde{\tau}_\kappa)$ — прямая. Если точки на плоскости $\tilde{\tau}$, \tilde{b} , полученные из эксперимента, в пределах погрешности укладываются на одной прямой, то это будет доказательством того, что движение действительно равномерно ускоренное. Крутизна прямой и ее начальная ордината будут определять соответственно значения ускорения силы тяжести g и начальную скорость шарика v_0 в начале координат.

2.3.2. Движение по криволинейной траектории в поле тяжести Земли.

Чтобы обеспечить криволинейное движение шарика в поле тяжести Земли, скатывают его предварительно по наклонному желобу, образующему с горизонтальной плоскостью угол φ_0 . Свободное движение шарика начинается после его выхода из желоба в точке В (рис. 2.1). Траектория движения центра шарика фиксируется так же, как в пункте 2.3.1. Если сопротивление воздуха не учитывать, то движение в горизонтальном направлении должно быть равномерным, в вертикальном же направлении — равномерно ускоренным с ускорением g . Выберем систему координат так, чтобы ось x была горизонтальной, а ось y направлена вертикально вниз (рис. 2.1), начало координат поместим опять в центр первого отчетливо различимого снимка шарика на фотопленке вне желоба (точка D на рис. 2.1). Координаты центра шарика в моменты фотографирования запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_\kappa &= v_x \kappa T, \\ y_\kappa &= v_{yD} \cdot \kappa T + \frac{g \kappa^2 T^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Разделив опять обе стороны второго равенства на κT и произведя такую же замену переменных, как в п. 2.3.1, получим:

$$\left. \begin{aligned} x_\kappa &= 2 v_x \tilde{\tau}_\kappa, \\ \tilde{b}_\kappa &= v_{yD} + g \tilde{\tau}_\kappa. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

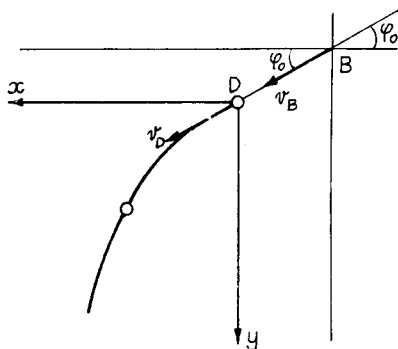


Рис. 2.1. Криволинейная траектория шарика.

v_x и v_{yD} в этих равенствах суть горизонтальная и вертикальная составляющая скорости центра шарика в начале координат. Если полученные из опыта точки \tilde{x}_k , \tilde{y}_k располагаются на одной прямой, то это доказывает, что движение в горизонтальном направлении равномерное. Крутизна этой прямой определяет значение горизонтальной составляющей скорости v_x , по которому можно вычислить модуль скорости шарика, а также вертикальную составляющую ее в момент выхода шарика из желоба (в точке B на рис. 2.1):

$$v_B = \frac{v_x}{\cos \varphi_0}, \quad (2.8)$$

$$v_{yB} = v_x \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (2.9)$$

Если полученные экспериментальные точки в осях \tilde{x} , \tilde{y} укладываются на одну прямую, то это доказывает, что движение в вертикальном направлении является равномерно ускоренным; крутизна этой прямой определяет ускорение g . (При желании можно по начальной ординате вычислить v_{yD} .)

Для идентификации формы траектории центра шарика исключим из системы уравнений (2.6) κ, T :

$$y_k = \frac{v_{yD}}{v_x} x_k + \frac{g}{2 v_x^2} x_k^2. \quad (2.10)$$

Получилось уравнение параболы.

Разделим обе половины уравнения (2.10) на x_K и введем обозначения:

$$\frac{y_K}{x_K} = \varepsilon_K, \quad (2.11)$$

$$\frac{g}{2v_K^2} = \frac{g}{2v_B^2 \cos^2 \varphi_0} = c, \quad (2.12)$$

в результате чего получим

$$\varepsilon_K = \frac{v_{KD}^2}{v_K^2} + c x_K. \quad (2.13)$$

Если опытные точки в осях x , ε в пределах погрешностей ложатся на одну прямую, то этим будет доказано, что траектория центра шарика — парабола. По крутизне этой прямой c можно определить скорость центра шарика v_B в момент выхода его из наклонного желоба.

2.3.3. Качение шарика в желобе. В процессе качения шарика в наклонном желобе происходит превращение его потенциальной энергии в кинетическую, а вследствие неизбежного наличия трения часть ее превращается в теплоту. Качение можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного движения центра масс и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс. Если высота наклонного желоба равна h (рис. 2.2) и качение шарика начинается из состояния покоя в верхней точке желоба, то во время качения потенциальная энергия его уменьшается на $\Delta W_n = mgh$ (m — масса шарика). Кинетическая энергия шарика в конце качения запишется как сумма энергий поступательного и вращательного движений:

$$W_K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad (2.14)$$

где v — линейная скорость центра масс относительно желоба,

ω — угловая скорость вращения шарика,

J_c — момент инерции шарика относительно оси, проходящей через центр масс.

В установке используется желоб с \vee -образным поперечным сечением (рис. 2.2). Внутренний двугранный угол желоба обозначим через β . Шарик опирается на желоб в двух точках: A и B . При качении шарика точки касания его с желобом образуют на его поверхности две окружности, центры которых расположены на оси вращения CC' . Если радиус шарика обозначить через R , то радиус этих окружностей (см. рис. 2.2) выразится следующим образом:

$$r = R \sin \frac{\beta}{2}. \quad (2.15)$$

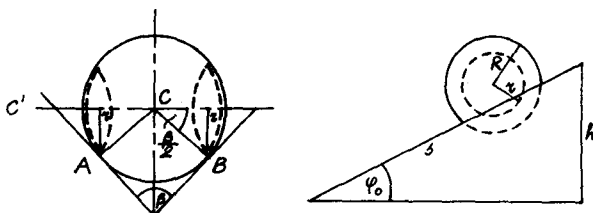


Рис. 2.2. Качение шарика в наклонном желобе.

При качении без скольжения величины v и ω связаны однозначно:

$$v = \omega r. \quad (2.16)$$

Пользуясь формулами (2.15) и (2.16) и выражением момента инерции шарика $J_c = \frac{2}{5} m R^2$, можно выражение кинетической энергии (2.14) привести к виду:

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + \frac{2}{5 \sin^2 \frac{\beta}{2}} \right). \quad (2.17)$$

Подставив в последнюю формулу значение скорости шарика в нижнем конце желоба v_B , можно вычислить относительное уменьшение механической энергии при качении шарика по желобу:

$$\frac{\Delta W'}{W} = \frac{mgh - W_{k\beta}}{mgh} = 1 - \frac{v_B^2}{2gh} \left(1 + \frac{2}{5 \sin^2 \beta} \right). \quad (2.18)$$

Так как измерить длину наклонного желоба Δ проще, чем высоту h , то перепишем формулу (2.18) окончательно в виде:

$$\frac{\Delta W'}{W} = 1 - \frac{v_B^2}{2gs \sin \varphi_0} \left(1 + \frac{2}{5 \sin^2 \frac{\beta}{2}} \right). \quad (2.19)$$

Скорость v_B определяется из опыта (см. п. 2.3.2).

Доля механической энергии, определенная формулой (2.19), затрачивается на преодоление сил трения. При качении без скольжения сила трения скольжения естественно отсутствует, соотношение (2.16) между поступательным движением и вращением обеспечивает сила трения покоя, являющаяся консервативной. Потеря энергии обусловлена присутствующей при качении силой трения качения. Шарик создает в опоре вмятину, вследствие остаточной деформации эта вмятина не-симметрична в направлении движения шарика, ее задний край выше переднего, поэтому реакция опоры направлена не перпендикулярно к наклонной плоскости, а несколько наклонена и не проходит через центр шарика. Так возникает сила сопротивления, составляющую которой, параллельную наклонной плоскости, можно рассматривать как силу трения качения, препятствующую поступательному движению шарика. Момент силы реакции опоры относительно оси вращения CC' (рис. 2.2) замедляет вращение при качении, так что соотношение (2.16) остается в силе.

2.4. Описание установки

Установка состоит из рамы I (рис. 2.3), экрана 2, укрепленного на уширенном конце рамы, электромагнитов 3 и 4, фиксирующих шарик в его начальном положении, наклонного желоба 5 в верхней части экрана (наклон желоба можно изменять произвольно), штатива 6 для укрепления фотоаппарата 7 и опорной плиты 8, служащей для установки на ней стробоскопи-

ческого осветителя 9.

Экраном служит пластинка из бумажного пластика, окрашенная с одной стороны в черный цвет с нанесенными на нее белыми горизонтальными и вертикальными прямыми, образующими квадраты со стороной в 10 см (фоновая шкала). На центральную вертикальную линию нанесена сантиметровая шкала. У нижнего края экрана расположена коробка 10 с песком, чтобы избежать отскока шарика от стола.

Для получения периодических световых импульсов используется электронный стробоскоп, состоящий из источника света 9 и блока управления II. Стробоскоп питается от сети переменного тока в 220 В. Включение прибора в сеть производится с помощью выключателя I (рис. 2.4), при этом должна начать мигать сигнальная лампа 3, что указывает на исправность цепи низкого напряжения стробоскопа. На передней панели справа расположены кнопки включения источника света SEERIA (серия) 4 и UKSIK (одиночный) 5. При нажатии кнопки 5 (UKSIK) стробоскоп дает один световой импульс. Возникновение этого импульса свидетельствует, что цепь высокого напряжения прибора в порядке. Одиночными импульсами можно пользоваться также для установки осветителя в нужном направлении, чтобы осветить определенную область экрана.

При кратковременном нажатии на стартовую кнопку 4 (SEERIA) или при кратковременном закорачивании клемм 6 стробоскоп дает серию, состоящую из 24 световых импульсов. Продолжительное нажатие кнопки SEERIA или соединение накоротко клемм 6 позволяет получить более длинные серии световых импульсов объемом 24 n импульсов ($n = 1, 2, 3, \dots$). Стробоскоп может давать световые импульсы семи различных частот в зависимости от положения переключателя 7 ($,N''$). Частота повторения импульсов вычисляется по формуле

$$f = \frac{f_0}{2^N}$$

где $N' = 0, 1, \dots, 6$, f_0 — частота сетевого напряжения.

Электромагниты 3 и 4 (рис. 2.3) питаются от выпрямителя, находящегося в стробоскопе. Электрическая цепь выпрями-

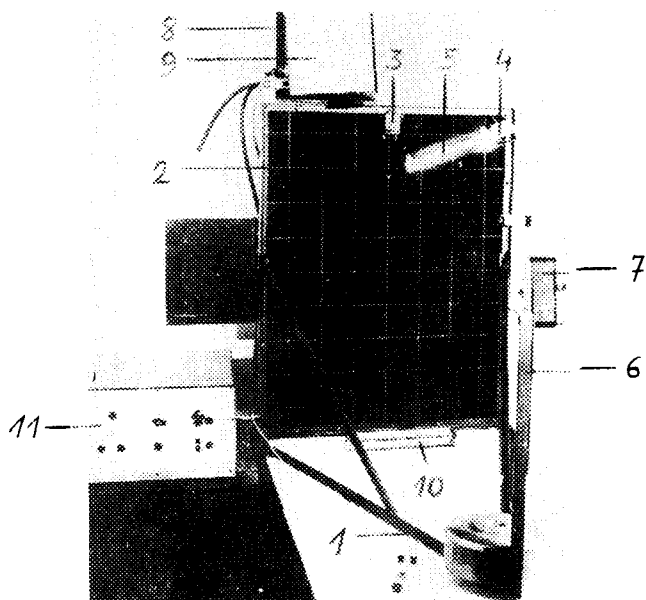


Рис. 2.3. Опытная установка для изучения движения в поле тяжести стробоскопическим методом.

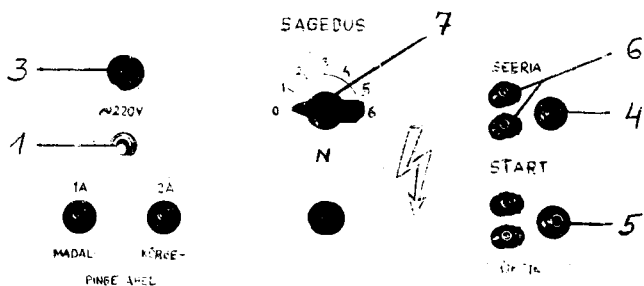


Рис. 2.4. Пульт управления стробоскопа.

теля разрывается автоматически в момент пуска стробоскопа и замыкается снова после окончания серии импульсов. Это обстоятельство позволяет освободить шарик одновременно с пуском стробоскопа. Если соединить пусковые клеммы 6 стробоскопа с синхронным контактом фотоаппарата, то становится возможным пуск всей системы открытием затвора фотоаппарата.

Некоторые детали, прикрепленные к экрану, которые здесь не упоминаются, нужны для выполнения других работ на этой установке. Возможные значения угла наклона желоба φ_0 , длина желоба l и длина стороны квадрата фоновой шкалы a даются как постоянные установки.

2.5. Ход работы

2.5.1. С помощью отвеса проверяют вертикальность отвесных линий на экране. Шнур стробоскопа соединяют с сетью, затем включают сам прибор с помощью выключателя I (рис.2.4). Затем убеждаются в исправности стробоскопа и устанавливают осветитель в таком положении, чтобы траектория шарика на экране хорошо освещалась. При необходимости можно изменить положение осветителя на опорной плите 8 (рис. 2.3), освободив для этого зажим на обратной стороне плиты. Затем устанавливают фотоаппарат на штативе 6 и направляют его так, чтобы траектория шарика (а при бросании шарика под углом к горизонту и наклонный желоб) оказалась в кадре. Наводят аппарат на резкость по фоновой шкале на экране, выдержку устанавливают на B (время). Величина отверстия диафрагмы зависит от чувствительности пленки, ее задает лаборант. Для открывания затвора следует пользоваться спусковым тросиком, чтобы избежать сдвига аппарата во время фотографирования. Присоединяют к аппарату спусковой тросик. Во избежание попадания на пленку фонового паразитного света в промежутках между световыми импульсами стробоскопа следует непосредственно перед фотографированием затемнить помещение.

При фотографировании вертикально падающего шарика затвор фотоаппарата следует открыть одновременно с пуском стробоскопа (в тот же момент начинается и падение!). Для этого можно либо нажать одновременно на спусковой тросик и кнопку 4 (рис. 2.4) (кнопку 4 можно дублировать, соединив

клеммы 6 проводом с передвижной кнопкой, которую можно поместить вблизи фотоаппарата); либо соединить клеммы 6 с помощью провода с синхронным контактом фотоаппарата (предназначенного для присоединения лампы-вспышки). Для фотографирования шарика, скатывающегося по наклонному желобу, во избежание попадания на пленку фонового света, следует открыть затвор лишь к моменту подхода шарика к нижнему концу желоба. В этом случае нет возможности пользоваться синхронным контактом фотоаппарата. При выборе частоты световых импульсов надо исходить из требования получения максимальной информации, что в данном случае означает получение как можно большего числа неперекрывающихся снимков шарика. Визуальное наблюдение движения шарика позволяет убедиться в том, что частота импульсов в 50 Гц в наших условиях является оптимальной. Для скатывания шарика с наклонного желоба при такой частоте одной серии из 24 импульсов оказывается недостаточно. Поэтому для фотографирования нажимают кнопку пуска стробоскопа, открывают затвор фотоаппарата к моменту подхода шарика к нижнему концу желоба и закрывают после того, как шарик упадет в ящик с песком, и только после этого освобождают кнопку включения стробоскопа. В нужном при этом взаимодействии двух рук следует прежде поупражняться.

2.5.2. Желоб закрепляют под углом, заданным руководителем практикума. Фотографируют вертикальное и наклонное падение двух шариков разных размеров. На случай возможных неудач все опыты повторяют по меньшей мере два раза. Проявляют пленку.

2.5.3. Для выполнения заданий, перечисленных в п.2.1, надо измерить координаты центра шарика в моменты съемки в системе координат, описанной в п. 2.3. Для этого находят координаты центров его снимков на фотопленке, пользуясь проекциями вышеупомянутых систем отсчета на плоскость пленки, и делают эти координаты на коэффициент уменьшения фотоаппарата - K . Для измерения координат на фотопленке пользуются либо измерительным микроскопом, столик которого перемещается в двух взаимно перпендикулярных направлениях, либо столиком для наблюдения спектрограмм. Можно, однако,

спроецировать кадр с помощью фотоувеличителя на бумагу, отметить на ней центры снимков шара и вершины квадратов шкалы и затем измерить координаты, пользуясь для этого линейкой и треугольником. Величина K при этом является суммарным коэффициентом уменьшения фотообъектива и проекционного объектива.

Значения координат вносят в протокол в виде таблицы.

2.5.4. Вследствие наличия искажений оптических систем коэффициент уменьшения может в разных частях кадра быть несколько различным. Поэтому определяют его среднее значение. Для этого измеряют длины сторон квадрата фоновой шкалы по меньшей мере в двадцати местах в непосредственной близости траектории шарика. В случае вертикального падения достаточно измерить вертикальные стороны квадратов, а в случае наклонного падения вертикальные и горизонтальные стороны попеременно. Эти измерения оформляют тоже в виде таблицы. Среднее значение коэффициента уменьшения находят как частное от деления арифметического среднего полученных результатов измерений на действительное значение стороны квадрата (100 мм). Изменения коэффициента уменьшения проявляются теперь как случайная ошибка его определения.

2.5.5. Результаты измерений можно обрабатывать либо графически, либо на ЭВМ в диалоговом режиме. В первом случае надо построить графики зависимостей, выраженных формулами (2.5) и (2.7), нанеся на плоскости точки вместе с их предельными погрешностями. Убедившись, что графики в пределах погрешностей прямые линии, определяют значения крутизны. Так получают два значения β и горизонтальную составляющую скорости v_x ; исходя из последней, вычисляют модуль скорости шарика v_B в момент выхода шарика из желоба по формуле (2.8). Для доказательства того, что траектория шарика — парабола, строят график зависимости (2.13), который в пределах погрешностей должен быть прямой линией. По формуле (2.19) вычисляют относительную потерю энергии на преодоление трения.

Если опытные данные решено обрабатывать графически, следует таблицы данных составить таким образом, чтобы в

них уместились также все значения величин, необходимые для построения графиков (2.5), (2.7) и (2.13), т.е. τ_k , ε_k , а также предельные погрешности значений τ_k и ε_k .

2.5.6. Для обработки данных на ЭВМ следует, отвечая на ее вопросы, ввести в нее все результаты измерений и постоянные установки. ЭВМ находит прямые, проведенные через экспериментальные точки (приближающие прямые функций (2.5) и (2.7)) методом наименьших квадратов [1, п. 30.10, 39.3, 2, п. 9], выдает таблицы величин, необходимых для построения графиков функций (2.5), (2.7) и (2.13), а также значения ускорения силы тяжести, скорости шарика на выходе из желоба и относительной потери энергии вместе с их предельными погрешностями для каждого опыта. Дополнив таблицы еще колонками предельных погрешностей, строят графики функций (2.5), (2.7) и (2.13) и делают заключение о характере движения и форме траектории.

2.5.7. Из сравнения результатов опытов с разными шариками выясняют, зависят ли кинематические (ускорение силы тяжести, скорость на выходе из желоба), а также динамические (потеря энергии на преодоление трения) величины от размеров движущегося тела (шарика).

2.6. Дополнительные задания

2.6.1. До практикума

А. Выписать систему дифференциальных уравнений, описывающих движение при качении шарика по наклонной плоскости. Объяснить, при каком условии качение происходит без скольжения.

Б. Можно ли рассматривать качение шарика как вращение вокруг мгновенной оси вращения? Какова эта ось?

В. Чему равно отношение энергий поступательного и вращательного движения при качении однородного и тонкостенного цилиндров?

Г. Влияет ли вращение шарика в полете на форму траектории полета?

Д. Влияет ли конечная продолжительность светового им-

пульса на точность определения положения шарика? Если да, то где будет возникающая погрешность больше, в начале или в конце траектории?

Е. Вычислить, на каком расстоянии от электромагнита при вертикальном падении шарика получится первый его снимок, не перекрывающийся с предыдущим при частоте импульсов 50 и 25 Гц.

Ж. Почему при обработке результатов целесообразнее пользоваться формулами (2.5) и (2.7) вместо формул (2.2) и (2.6)?

З. Объяснить, как можно определить случайные погрешности крутизны и начальной ординаты прямой, проведенной через совокупность экспериментальных точек (см. [2], п. 9).

2.6.2. После практикума

И. Если из ответов на вопросы, поставленные в п.2.5.7, выяснится, что по результатам опытов значение ускорения силы тяжести не зависит от размеров шарика, то надо объяснить, почему сопротивление в этих опытах не проявляется. Ведь сопротивление воздуха должно возрастать с увеличением размеров шарика!

К. Если окажется, что потеря энергии на преодоление трения зависит от размеров шарика, то следует объяснить причину этого явления.

2.7. Литература

1. Tammet H. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Tln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воодайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТТУ, 1983. - 55 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1973. - I. - §§ 3-10, 38, 41.
4. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. - С.265-267.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ БАЛЛИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

3.1. Введение

Одним из возможных методов определения скорости быстро движущихся тел малых размеров (например, ружейная пуля) является баллистический. Изучаемое тело соударяется неупруго с другим телом большой массы, представляющим собой обычно маятник, т.е. систему, имеющую ось вращения и могущую совершать колебания вокруг этой оси. В силу большой разницы масс выполняется неравенство

$$\Delta t \ll T,$$

где Δt — время соударения, т.е. время, в течение которого тело действует на маятник с некоторой силой, а T — период колебаний маятника. Выполнение такого неравенства позволяет рассматривать движение маятника как два последовательных процесса.

1. Если $t \leq \Delta t$, то маятник к этому времени еще не успел заметно сместиться из положения равновесия; сила, стремящаяся вернуть маятник в положение равновесия, незначительна и систему маятник — исследуемое тело можно считать изолированной. К такой системе можно применить законы сохранения импульса и момента импульса.

2. Если $t > \Delta t$, то действие сил удара уже прекратилось и маятник движется под действием возвращающей силы и сил сопротивления, т.е. колеблется свободно. Теперь к системе можно применить уравнение затухающих колебаний, а в случае слабого затухания в первом приближении — уравнение собственных колебаний. В первом приближении можно воспользоваться и законом сохранения механической энергии.

В данной работе исследуемым телом является пуля воздушного ружья. При взводе воздушного ружья сжимается пружина.

жина, находящаяся в цилиндре позади поршня плотно прилегающего к стенками цилиндра. Пуля вводится в ствол сзади. При нажатии на спусковой крючок пружина резко приводит поршень в движение; под поршнем возникает большое избыточное давление воздуха, выталкивающее пулю из ствола.

Скорость пули в настоящей работе измеряется с помощью разных маятников.

3.2. Баллистический маятник

3.2.1. Задание

Ознакомление с баллистическим методом и опытное определение скорости полета пули.

3.2.2. Принадлежности

Баллистический маятник, воздушное ружье, пули, измерительная шкала, аналитические весы, технические весы, металлическая линейка, штангенциркуль.

3.2.3. Теория работы и описание установки

Баллистический маятник представляет собой массивное тело (в настоящей работе цилиндр, частично заполненный пластилином), подвешенное на четырех длинных легких нитях (рис. 3.1). В маятник стреляют горизонтально. Когда пуля, масса которой m и скорость v_n , попадает в маятник массой M и застревает в нем, то возникающая в результате такого неупругого столкновения система массой $M+m$ приобретает скорость v . Движение маятника оказывается поступательным (все прямые остаются параллельными самим себе); все точки, в том числе и центр масс C , движутся по окружностям, радиусы которых равны длине нитей подвеса L . К маятнику можно точно применить модель материальной точки, расположенной в центре масс C и висящей на нити длиной L , прикрепленной в точке O . Эта модель может поворачиваться вокруг перпендикулярной к плоскости рисунка оси, проходящей через точку O (ось OO'). После столкновения с пулей она повернется на угол α , точка C поднимется на некоторую высоту h . В соответствии с замечанием, сделанным во введении, можно к системе пуля - маятник приме-

нить закон сохранения скалярного момента импульса относительно оси OO' :

$$m v_n L = \mathcal{I} \omega, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{I} = (M+m) L^2$ — момент инерции системы относительно оси вращения, ω — угловая скорость отклонения системы в конце удара.

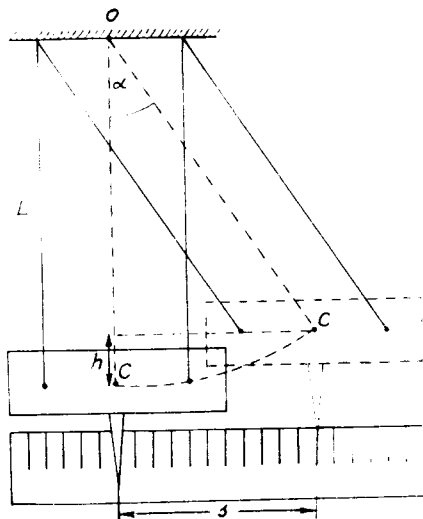


Рис. 3.1. Баллистический маятник.

Преобразование уравнения (3.1) дает

$$m v_n L = (M+m) L^2 \cdot \frac{v}{L},$$

$$m v_n = (M+m) v. \quad (3.2)$$

Итак, рассуждения показали, что к системе пуля — маятник применим и закон сохранения импульса (3.2), хотя система и не является изолированной.

Скорость v можно найти следующим образом. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{(M+m)v^2}{2} = (m+m)gh,$$

откуда

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.3)$$

Высоту h можно вычислить, измерив отклонение маятника по горизонтали. Для этого к маятнику несколько ниже центра масс прикреплен вертикальная визирная нить, позади которой можно поместить горизонтальную шкалу (рис. 3.1). Из рисунка 3.1 следует, что

$$h = L - L \cos \alpha = 2L \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (3.4)$$

Угол α можно определить из условия

$$\sin \alpha = \frac{s}{L}, \quad (3.5)$$

где s — смещение визирной нити в горизонтальном направлении.

На основе формул (3.2), (3.3) и (3.4)

$$v_n = 2 \frac{M+m}{m} \sqrt{gL} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Приняв

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

и

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2},$$

можно формулу для вычисления скорости пули привести к виду:

$$v_n = \frac{(M+m)s}{mL} \sqrt{gL} = \frac{(M+m)s}{m} \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (3.6)$$

Как постоянные установки задаются масса цилиндра M' (без наконечника с пластином) и длина нитей крепления L

(т.е. расстояние центра масс C от оси OO').

Длины нитей можно в ограниченном диапазоне изменять с помощью регулировочных винтов (с целью приведения оси цилиндра в горизонтальное положение). Диапазон регулировки входит в заданную погрешность измерения величины L .

3.2.4. Ход работы

3.2.4.1. Для определения массы пули взвешивают все пули на аналитических весах и делят результат на число пуль. Расхождение масс отдельных пуль считают предельной случайной погрешностью взвешивания. Для ее определения выявляют методом сравнения пули с минимальной и максимальной массой и измеряют непосредственно разность их масс. Половину этой разности и принимают за случайную погрешность.

3.2.4.2. С помощью регулировочных винтов, изменяя длину нитей подвеса, приводят баллистический маятник в такое положение, чтобы ось цилиндра была горизонтальна, а визирная нить вертикальна. Позади визирной нити устанавливают миллиметровую шкалу, снабженную зеркалом, так, чтобы визир оказался между шкалой и зеркалом. Шкала должна быть параллельна оси цилиндра.

3.2.4.3. В целях безопасности перед установкой ставят прозрачный экран из органического стекла, повернув его вокруг вертикальной оси. Заряжают воздушное ружье, нацеливают его тщательно на центр основания цилиндра (оси ствола ружья и цилиндра должны по возможности точно совпасть). Дуло ружья должно быть от маятника на расстоянии не менее 60 см (почему?).

3.2.4.4. Когда помощник (другой студент, руководитель практикума, лаборант) освободит спуск, регистрируют смещение δ визирной нити по шкале, стараясь избежать погрешности от параллакса (каким образом?). Опыт повторяют со всеми пулями.

3.2.4.5. Пули воздушного ружья не очень точно калиброваны, следовательно рассеяние значений δ может быть значительным. Поэтому сначала вычисляют скорость одной конкретной пули и оценивают погрешность измерения. Далее находят среднее значение измеренных смещений δ для всех пуль, вычисляют среднее значение скорости пуль, как вели-

чину, характеризующую ружье и данную партию пуль. По рассеянию значений смещения оценивают возможные отклонения скорости пули от среднего значения, пользуясь методом оценки случайной погрешности измерения.

3.2.5. Дополнительные задания

3.2.5.1. До практикума

А. Является ли формула для момента инерции системы $J = (M + m) L^2$, приведенная при объяснении обозначений соотношения (3.1), точной или приближенной? Если она приближена, то какова будет точная формула?

Б. Вывести формулу для вычисления скорости пули в случае, когда передняя стенка баллистического маятника, о которую ударяется пуля, и сама пуля являются абсолютно упругими (в предположении, что $m \ll M$, т.е. пуля отскакивает со скоростью, практически неизменной по модулю). Было ли бы при этом смещение маятника больше или меньше, чем в нашем случае?

В. Для чего нужно зеркало при определении смещения визирной нити?

3.3. Баллистический крутильный маятник

3.3.1. Задание

Ознакомление с баллистическим методом измерений и опытное определение скорости полета пули.

3.3.2. Принадлежности

Баллистический крутильный маятник, осветитель, измерительная шкала, воздушное ружье, пули, секундомер, измерительная линейка, аналитические весы, разновес.

3.3.3. Теория

Пуля, попадая в маятник (см. описание установки), заставляет повернуться его вокруг вертикальной оси. Если пренебречь моментом сил трения, можно воспользоваться законами сохранения (см. введение). Считая удар абсолютно неупругим, можно на основании закона сохранения момента импульса записать (до удара и непосредственно после пре-

крашения действия сил, возникающих при соударении, т.е. спустя промежуток времени Δt от начала удара):

$$m v L = (J_1 + m L^2) \omega, \quad (3.7)$$

где m — масса пули, v — скорость пули, L — расстояние от оси вращения до места удара, ω — угловая скорость маятника, J_1 — момент инерции маятника относительно оси вращения.

Из закона сохранения механической энергии (после удара) следует:

$$\frac{1}{2} (J_1 + m L^2) \omega^2 = \frac{1}{2} D \varphi^2, \quad (3.8)$$

где φ — максимальное значение угла поворота маятника в первом колебании, D — постоянная момента сил упругости (дирекционный момент).

Из этих уравнений можно найти скорость пули v :

$$v^2 = \frac{D \varphi^2}{m^2 L^2} (J_1 + m L^2). \quad (3.9)$$

Так как момент инерции пули $m L^2$ во много раз меньше, чем J_1 , то уравнение (3.9) можно записать приближенно в виде:

$$v^2 = \frac{D \varphi^2 J_1}{m^2 L^2}. \quad (3.10)$$

Дифференциальное уравнение движения маятника после окончания удара, т.е. когда $t > \Delta t$, без учета трения запишем в виде:

$$J_1 \ddot{\alpha} = -D \alpha,$$

где α — угол поворота маятника, $\ddot{\alpha}$ — угловое ускорение его.

Преобразовав это уравнение к виду:

$$\ddot{\alpha} + \frac{D}{J_1} \alpha = 0 \quad (3.11)$$

можно заметить, что маятник колеблется гармонически. Для периода колебаний получится формула:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{D}} \quad (3.12)$$

Величины D и J_1 трудно измеримы, поэтому надо их из формулы исключить. Для этого изменяют момент инерции маятника и получают для периода колебаний выражение:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{D}}. \quad (3.13)$$

Определяют разность:

$$J_1 - J_2 = \Delta J \quad (3.14)$$

Из уравнений (3.12) и (3.13) вытекает:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}, \quad (3.15)$$

из уравнений (3.14) и (3.15):

$$J_1 = \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} \Delta J. \quad (3.16)$$

Заменив в формуле скорости (3.10) D из формулы (3.12), а затем J_1 из формулы (3.16), получают:

$$v = \frac{2\pi \varphi}{m L} \cdot \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} \Delta J. \quad (3.17)$$

Изменение момента инерции маятника достигается путем перемещения вдоль стержней цилиндров 5 и II (рис. 3.2). По теореме Штейнера момент инерции маятника

$$J_1 = J_0 + 2mR_1^2 \quad (3.18)$$

и

$$J_2 = J_0 + 2mR_2^2, \quad (3.19)$$

где J_0 — момент инерции маятника в случае, если бы центры масс обоих цилиндров находились на оси вращения, J_1 и J_2 — значения момента инерции, когда центры масс обоих цилиндров находятся соответственно на расстоянии R_1 и R_2 от оси вращения, M — масса одного цилиндра.

Из уравнений (3.18) и (3.19) получается:

$$J_1 - J_2 = \Delta J = 2M(R_1^2 - R_2^2). \quad (3.20)$$

Введя последнее выражение в формулу (3.17), получают окончательную формулу для вычисления скорости:

$$v = \frac{4\pi\varphi M}{mL} \cdot \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} (R_1^2 - R_2^2). \quad (3.21)$$

3.3.4. Описание установки

Основными составными частями установки являются крутильный маятник, воздушное ружье и осветитель со шкалой.

Маятник (рис. 3.2) состоит из двух горизонтальных стержней 4 и 10, укрепленных на вертикальном стержне 3 с помощью муфты 7. На горизонтальные стержни нанизаны массивные металлические цилиндры 5 и 11, перемещением которых вдоль стержней можно изменять момент инерции маятника.

На конце каждого из горизонтальных стержней имеется чашечка с пластином (6 и 12). Чашечки эти тоже могут перемещаться вдоль стержней. Пластилин обеспечивает неупругость удара.

Зеркало 8, закрепленное на вертикальном стержне 3, служит для измерения угла поворота маятника.

Луч света, исходящий из осветителя, закрепленного на отдельном штативе, отражается от зеркала и дает световое пятно ("зайчик") на шкале, находящейся на том же штативе, что и осветитель. При повороте маятника "зайчик" перемещается по шкале.

Угол поворота маятника φ определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{s}{\ell}, \quad (3.22)$$

где ℓ — расстояние от зеркала до шкалы (по перпендикуляру);
 s — смещение "зайчика" по шкале.

С помощью проволоки 2 маятник прикреплен к кронштейну, нижний конец вертикального стержня поддерживается опорой на керне 9. При повороте стержня проволока деформируется (закручивается), в результате чего возникает момент сил упругости, препятствующий повороту. Освободив зажимную гайку I, можно поворачивать маятник вокруг вертикальной оси и устанавливать его в нужном положении.

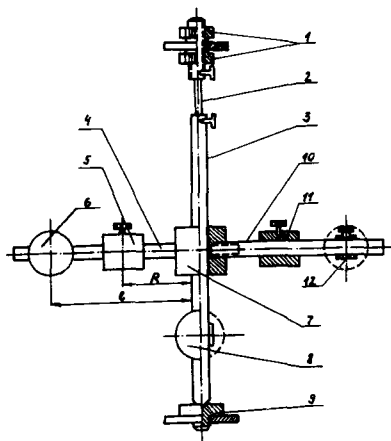


Рис. 3.2. Маятник.

Воздушное ружье закреплено на массивном штативе.

Лампочка осветителя питается от сети через понижающий напряжение трансформатор. Для проецирования изображения нити лампочки на измерительную шкалу корпус лампочки может пе-

ремещаться в вертикальном направлении и поворачиваться вокруг вертикальной и горизонтальной осей. Фокусировка изображения производится с помощью подвижной конденсорной линзы.

Как постоянная прибора задается масса M подвижных цилиндров.

3.3.5. Ход работы

3.3.5.1. Проверяют вертикальность проволоки подвеса 2 (рис. 3.2) и ее натяжение (вертикальный стержень только слегка давит на нижнюю опору на керне). При надобности регулируют высоту подвеса с помощью гайки I. Освободив верхнюю гайку, поворачивают маятник так, чтобы горизонтальные стержни были параллельны стене, и хорошо зажимают гайку.

3.3.5.2. Устанавливают измерительную шкалу параллельно горизонтальным стержням на расстоянии приблизительно 40 см от маятника, приводят "зайчик" на середину шкалы так, чтобы горизонтальная проекция луча была по возможности перпендикулярна шкале. Фокусируют изображение нити накала лампочки (края изображения на шкале должны быть отчетливыми).

3.3.5.3. Взвешивают пули, как это указано в п.3.2.4.1.

3.3.5.4. Выбирают расстояние чашек с пластилином L и металлических цилиндров R от оси вращения согласно решению дополнительного задания В. Устанавливают чашечки и цилиндры на одинаковых (в пределах погрешности измерения) расстояниях по обе стороны от вертикального стержня, крепко закрепляют их. Заряжают ружье, тщательно нацеливают его на середину чашечки. Дуло ружья должно быть на расстоянии не менее 60 см от чашечки, защитный экран из органического стекла должен загораживать установку.

3.3.5.5. Когда помощник (другой студент, руководитель практикума, лаборант) освободит спуск, регистрируют смещение "зайчика" по шкале с максимальной возможной точностью. Опыт повторяют со всеми пулями.

3.3.5.6. Определяют периоды колебаний T_1 и T_2 (при расстояниях цилиндров R_1 и R_2). Для этого приводят маятник в колебание, повернув слегка пальцами вертикальный

стержень у нижней его опоры. Измеряют время N колебаний и вычисляют период. Число колебаний N руководитель практикума либо просто задает, либо предлагает определить решением дополнительного задания Д.

3.3.5.7. Данные обрабатывают так, как это описано в п. 3.2.4.5.

3.3.5.8. Для оценки выполнения неравенства $\Delta t \ll T$ определяют Δt приближенно. Для этого измеряют глубину d проникновения пули в пластину и вычисляют время движения ее в пластине по средней скорости $\bar{v} = \frac{v}{2}$:

$$\Delta t = \frac{d}{\bar{v}}.$$

3.3.6. Дополнительные задания

3.3.6.1. До практикума

А. Анализируя ход рассуждений при выводе формулы скорости (3.21), выяснить, при каком из значений R (R_1 или R_2) следует измерять угол поворота φ , или это безразлично.

Б. Допустим, что слой пластины оказался слишком тонким, пуля проникла до дна чашечки, отразилась от него, но осталась в пластине. Изменится ли от этого результат опыта?

В. Как следует выбрать расстояния L , R_1 и R_2 , исходя из требований минимума предельной погрешности конечного результата? Учесть, что при измерениях с помощью штангенциркуля или линейки абсолютная погрешность результата не зависит от длины измеряемого отрезка, R_1 и R_2 входят в формулу (3.21) в виде разности квадратов.

Г. Откуда происходит коэффициент $1/2$ в формуле угла поворота (3.22)?

3.3.6.2. Во время практикума

Д. Исходя из требования, чтобы доля предельной погрешности скорости, обусловленная множителем $\frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2}$, не превышала доли, приходящейся на все другие множители, найти необходимое число колебаний N при определении

периодов колебаний (см. п. 3.3.5.6). Для этого надо после измерения угла поворота φ сделать предварительный опыт, определить приблизительно значения периодов T_1 и T_2 , оценить относительные предельные погрешности, обусловленные всеми сомножителями, входящими в формулу (3.21), вывести формулу для вычисления относительной предельной погрешности сомножителя, содержащего периоды. Считая $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$, вычислить ΔT из вышеприведенных условий. Зная допустимую основную погрешность используемого секундомера $\Delta^0 t$ и оценку погрешности $\Delta^2 t$, обусловленную реакцией экспериментатора или автомата (если использовалась автоматическая установка), вычислить $N \approx (\Delta^0 t + \Delta^2 t) / \Delta T$.

3.4. Литература

1. Tammet H. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Tln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воолайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТТУ, 1987. - 60 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1973. - I.- §§ 22, 23, 27, 61, 62.
4. Физический практикум: Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И. Ивероновой. - М.: Наука, 1967. - Зад. 19, 20.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ МЕТОДОМ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

4.1. Задание

Ознакомление с работой строботаксметра и определение скорости полета пули.

4.2. Принадлежности

Опытная установка с вращающимися дисками, строботаксметр, воздушное ружье, пули, измерительная линейка, угломер.

4.3. Теория работы и описание установки

Используемая в настоящей работе установка для определения скорости полета пули состоит из двух бумажных дисков I и II (рис. 4.1), насаженных на один вал на расстоянии L друг от друга. Вал приводится во вращение электромотором.

Пуля, летящая параллельно оси вращения дисков, пробивает оба диска. Во время движения пули в пространстве между дисками, последние успевают повернуться на некоторый угол φ . Измерив угол φ , частоту вращения дисков ν и расстояние L между дисками, можно определить скорость пули v (см. дополнительное задание А). Для определения частоты вращения оси в настоящей работе пользуются стробоскопическим методом.

Стробоскопический метод определения частоты состоит в том, что вращающееся или колеблющееся тело освещают периодически повторяющимися короткими световыми импульсами. Если частота повторения импульсов равна частоте вращения или колебания, то у наблюдателя создается впечатление, что тело неподвижно (т.н. стробоскопический эффект). Явление объясняется инерцией человеческого зрения, т.е. для воз-

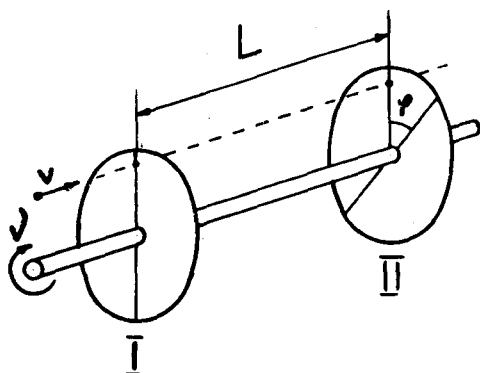


Рис. 4.1. Опытная установка с вращающимися дисками (схематический рисунок).

никновения и исчезновения зрительного ощущения нужен некоторый промежуток времени. Детали быстро вращающегося тела глаз не успевает фиксировать, но при кратковременном освещении их при каждом обороте в одном и том же положении у наблюдателя появляется зрительное ощущение.

Используемый в данной работе строботометр состоит из стробоскопического диска, укрепленного на вращающемся валу, и импульсной лампы с источником питания.

Система питания импульсной лампы задает частоту повторения импульсов $\gamma_{осв}$. Допустимая погрешность составляет 0,5% от показания. Дополнительная погрешность, связанная с температурой, равна 0,2 % на каждые 10 К разницы с нормальной температурой (20 °C). Стробоскопический диск изображен на рис. 4.2. На диске имеется 5 колец, разделенных соответственно на 5, 8, 12, 20 и 30 черных и белых зон. Если при освещении диска мелькающим светом все белые и черные зоны кажутся неподвижными, то это значит, что частота световых импульсов либо равна частоте вращения диска, либо меньше ее в целое число раз. Если неподвижными кажутся зоны толь-

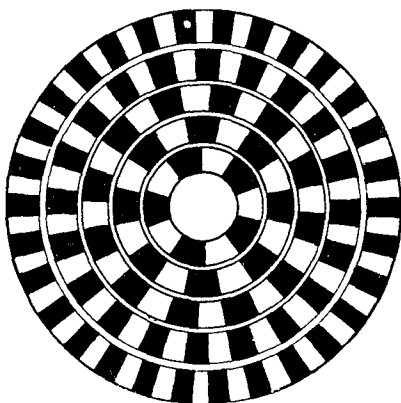


Рис. 4.2. Стробоскопический диск.

ко одного кольца, то частота вращения диска отличается от частоты повторения импульсов в нецелое число раз (см. дополнительное задание В).

Описанный метод применяется для определения скорости быстро движущихся тел и в других случаях, например для определения скорости молекул и молекулярных пучках.

4.4. Ход работы

4.4.1. Укрепляют на валу бумажные диски. Для этого отвинчивают гайку на конце вала и разъединяют валы дисков и мотора, перемещая вал дисков в горизонтальном направлении. Снимают с вала держатели бумажных дисков, укрепляют бумажные диски с вырезом в их центре в держателях. Во избежание скольжения держатели снабжены резиновыми шайбами. Так как вырезы в бумажных дисках могут быть плохо центрированы, на дисках следует очень четко вычертить края щек держателей. Это позволит в дальнейшем точно наложить диски один на другой. Соединяя валы, надо следить, чтобы пазы на валах совпали и клин вошел в оба паза. Хорошо закрепляют держатели дисков на валу (см. дополнительное задание Б), измеряют расстояние между дисками.

4.4.2. Нацеливают ружье так, чтобы пуля не попала в металлические детали установки и двигалась по возможности точно параллельно оси вращения дисков. Установка должна быть расположена на столе так, чтобы пуля попала в обивку на стене и застряла в ней. Производят один выстрел через неподвижные диски и отмечают дырки условным знаком. Эти дырки используются в дальнейшем при наложении дисков один на другой для восстановления их относительного начального положения.

4.4.3. Включают блок питания стробоскопа в сеть и выжидают пять минут, чтобы он прогрелся, затем включают импульсную лампу. Свет от импульсной лампы направляют на стробоскопический диск, расположив лампу по возможности близко к нему.

4.4.4. Включают в сеть шнур питания мотора. Для пуска мотора следует нажать кратковременно на кнопку включения пусковой обмотки. Осторожно! Край быстро вращающихся бумажных дисков очень острые! Определяют частоту вращения вала и производят выстрел. Включают мотор и после остановки дисков отмечают условным знаком дырки в обоих дисках. Так проделывают со всеми пулями.

4.4.5. Вынимают диски из держателей. Накладывают один диск на другой так, чтобы совпали дырки от выстрела через неподвижные диски, а также окружности, начерченные вначале по краям щек дисков держателей. Переносят с одного диска на другой отметки всех дырок вместе с их условными знаками. Наклеивают этот (другой) диск на лист чистой бумаги и отмечают на нем местоположение оси вращения (см. дополнительное задание Г), вычерчивают радиальные лучи в направлении всех дырок. С помощью угломера измеряют угол поворота дисков для каждой пули.

4.4.6. Вычисляют скорость полета одной пули и оценку погрешности измерения ее, исходя из оценок погрешности непосредственно измеренных величин. Совокупность углов поворота дисков φ позволяет вычислить среднюю скорость полета пули как величину, характеризующую воздушное ружье и данную партию пуль. По рассеянию значений φ , пользуясь методами оценки случайной погрешности измерения, оценивают

максимально возможное случайное отличие скорости пули от среднего ее значения.

4.5. Дополнительные задания

4.5.1. До практикума

А. Вывести формулу для вычисления скорости v пули, если известно расстояние L между дисками, частота вращения дисков ν и угол φ , на который диски поворачиваются за время прохождения пульей расстояния L .

Б. Выписать формулу для вычисления предельной погрешности скорости пули (на основе формулы, выведенной в предыдущем задании).

Из анализа характера погрешностей измерения величин L , ν и φ (как зависит, если зависит, погрешность от значения измеряемой величины?) решить, что является с точки зрения точности измерения более полезным – выбор по возможности больших или малых значений L и ν .

В. Если на стробоскопическом диске при его вращении кажется неподвижным одно кольцо, имеющее n черных и n белых зон, то возможно, что в течение периода повторения световых импульсов $T_{осб} = \nu_{осб}^{-1}$ диск поворачивается на одну, две или в общем i зон. Таким образом, оказывается возможным вычисление частоты вращения ν по формуле:

$$\nu = \frac{i}{n} \nu_{осб}.$$

Как можно установить, на сколько зон повернулся диск, если неподвижным кажется кольцо, имеющее n зон (т.е. чему равно число i)?

Г. Как определить местонахождение оси вращения на диске, вынутом из держателя (по окружности, обведенной вокруг щеки держателя)?

4.6. Литература

1. Tammet H. Füüsika praktikum: Metroloogia. – Tln.: Valgus, 1971. – 240 lk.
2. Воодайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. – Тарту: ТГУ, 1987. – 60 с.
3. Поль Р.В. Механика, акустика и учение о теплоте. – М.: Наука, 1971. – §§ 8, II.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

5.1. Задание

Определение коэффициента восстановления и времени соударения при центральном прямом ударе упругих шаров.

5.2. Принадлежности

Стенд для исследования удара шаров, баллистический гальванометр, стенд с конденсатором, резистором, двумя переключателями и гальваническим элементом, выпрямитель, провода.

5.3. Теория работы

Процесс соударения реальных твердых тел можно разделить на две фазы – сближение тел и расхождение их. Разделяет эти фазы момент относительного покоя тел. В фазе сближения происходит превращение кинетической энергии относительного движения тел (т.е. кинетической энергии одного тела в системе отсчета, связанной с другим телом) в потенциальную энергию упругой деформации, в фазе расхождения происходит обратное превращение энергии. Последний процесс называют восстановлением кинетической энергии. Так как в обеих фазах неизбежны потери энергии на остаточную деформацию и теплоту, возникающую при преодолении внутреннего трения материала, то кинетическая энергия не восстанавливается полностью (исключением является идеализированный предельный случай – абсолютно упругий удар). Потерю механической энергии при ударе характеризует коэффициент восстановления:

$$K = \frac{|v_{1n} - v_{2n}|}{|v_{10n} - v_{20n}|} \quad (5.1)$$

В этой формуле v_{10n} и v_{1n} , v_{20n} и v_{2n} - проекции скоростей соответственно первого и второго тела до и после удара на линию удара. Разности в числителе и знаменателе формулы (5.1) являются проекциями относительной скорости тел на линию удара после удара и до него.

Значение коэффициента восстановления определяется свойствами материала соударяющихся тел. Для опытного определения этой величины удобно использовать центральный прямой удар, так как в этом случае проекции скоростей на линию удара по абсолютному значению совпадают с их модулями. Центральный прямой удар двух шаров можно осуществить следующим образом.

Пусть два одинаковых шара из одного и того же материала подвешены на двух вертикальных нитях одинаковой длины так, что они касаются друг друга (расстояние между точками крепления нитей равно диаметру шаров).

Если теперь два таких маятника отклонить в их плоскости на равные углы и одновременно отпустить, произойдет центральный прямой удар шаров, причем в процессе удара скорости шаров в любой момент времени равны по модулю и противоположны по направлению. Формулу (5.1) можно теперь записать в виде:

$$k = \frac{|v - (-v)|}{|v_0 - (-v_0)|} = \frac{v}{v_0}, \quad (5.2)$$

где v_0 и v - скорости шаров непосредственно перед соударением и после него.

В описанной установке шары после удара удаляются друг от друга, поднимаются на некоторую высоту и соударяются снова. Вследствие потерь энергии высота их подъема уменьшается после каждого очередного соударения. Для n последовательных соударений можно по формуле (5.2) записать n уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= k v_{10}, \\ v_2 &= k v_{20}, \\ \dots &\dots \dots \dots \\ v_i &= k v_{i0}, \\ \dots &\dots \dots \dots \\ v_n &= k v_{n0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

В этих уравнениях v_{i0}^* и v_i^* — модули скорости шаров соответственно до и после i -го соударения.

Не учитывая трение при движении шаров между соударениями, можно записать:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_{20}^* \\ v_2 &= v_{30}^* \\ \vdots & \\ v_i &= v_{(i+1)0}^* \\ \vdots & \\ v_{n-1} &= v_{n0}^* \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

и тогда из системы уравнений (5.3) получится

$$K = \frac{v_n}{v_{10}}. \quad (5.5)$$

В последней формуле можно отношение скоростей выразить через отношение длин дуг, пройденных шарами. Длины дуг можно в опыте непосредственно измерить.

Пусть на рис. 5.1 будет изображено амплитудное положение маятника после очередного удара. Центр масс поднялся на высоту h по сравнению с положением равновесия. Скорость шара на подходе к положению равновесия (место соударения) можно вычислить по формуле

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (5.6)$$

где g — ускорение силы тяжести. Высоту h можно вычислить по длине нити подвеса L и углу ее отклонения α :

$$h = L - L \cos \alpha = 2L \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (5.7)$$

Так как $\alpha = \frac{s}{L}$, то при $2L \gg s$ можно соотношение (5.7) упростить:

$$h \approx \frac{s^2}{2L}. \quad (5.8)$$

Из формул (5.5), (5.6) и (5.8) получается

$$k = \left(\frac{\delta_n}{\delta_1} \right)^{1/n}, \quad (5.9)$$

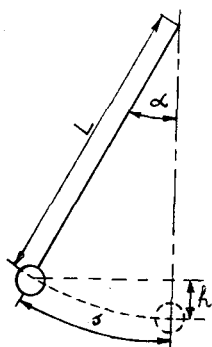


Рис.5.1. Один из соударяющихся шаров в амплитудном положении.

где δ_1 - длина дуги, пройденной шаром до первого соударения, δ_n - максимальное отклонение после n -го соударения.

Формула (5.9) не учитывает потери энергии на преодоление трения в движении между соударениями.

Методическую погрешность, обусловленную этим упущением, можно исключить следующим образом. Один из шаров отводят от положения равновесия на δ_1 и отпускают. После n свободных колебаний его измеряют амплитуду δ'_n . Умень-

шение амплитуды

$$\Delta \delta = \delta_1 - \delta'_n \quad (5.10)$$

обусловлено трением на пути, в два раза большем того, который шар проходит в случае n соударений. Следовательно, можно достаточно точно вычислить амплитуду после n соударений в отсутствии трения:

$$\delta_n + \frac{1}{2} \Delta \delta = \delta_n + \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta'_n), \quad (5.11)$$

и уточненная формула коэффициента восстановления принимает вид:

$$k = \left[\frac{\delta_n + \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta'_n)}{\delta_1} \right]^{1/n}. \quad (5.12)$$

Время, в течение которого соударяющиеся твердые тела находятся в контакте друг с другом, называется временем соударения. Время соударения Δt зависит от масс и раз-

меров тел, от упругих свойств материала, из которого они изготовлены, и от относительной скорости тел непосредственно перед ударом. Характер этой зависимости довольно сложный, Δt увеличивается с увеличением масс тел и с уменьшением их размеров, относительной скорости и модуля упругости материала. При центральном прямом ударе двух шаров, например, Δt оказывается приблизительно обратно пропорциональным корню пятой степени из относительной скорости непосредственно перед ударом.

Времена соударения обычных упругих макротел малы — порядка миллисекунды. Для измерения таких промежутков времени удобно пользоваться следующим электрическим методом. Если соединить соударяющиеся тела, изготовленные из проводящего электрический ток материала, через резистор с обкладками заряженного конденсатора, то за время соударения уменьшатся заряд и напряжение конденсатора. Измерив заряд или напряжение конденсатора до и после соударения, можно вычислить время соударения.

Пусть конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0 и обкладки его в момент времени $t_0 = 0$ соединяют через резистор сопротивлением R . В учении об электричестве показано, что напряжение при этом уменьшается по закону:

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (5.13)$$

В конечный момент соударения $t_1 = t_0 + \Delta t = \Delta t$ напряжение $U = U_1$, и время соударения

$$\Delta t = RC \ln \frac{U_0}{U_1}. \quad (5.14)$$

Мгновенное значение напряжения невозможно измерять с помощью обыкновенного вольтметра, так как проходящий через него ток разряжает конденсатор. Напряжение конденсатора может быть выражено через его заряд:

$$U = \frac{q}{C}. \quad (5.15)$$

Заряд же можно измерить с помощью баллистического гальва-

нометра. Это чувствительный магнитоэлектрический (обычно со световым указателем или зеркальный) гальванометр, вращающаяся измерительная система которого имеет большой момент инерции (за счет увеличения ее массы) и, следовательно, большой период колебаний (порядка 10 с). Это дает гальванометру интегрирующие свойства: кратковременный импульс тока вызывает колебание измерительной системы, причем амплитуда первого колебания прямо пропорциональна заряду, прошедшему через гальванометр в течение импульса тока. Если конденсатор, заряженный до напряжения U_0 , разрядить через баллистический гальванометр, зарегистрировав первое отклонение n_0 , затем зарядить снова до такого же напряжения и разрядить частично через соударяющиеся шары и затем снова разрядить через баллистический гальванометр (отклонение n_1), то соответствующие заряды q_0 и q_1 выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} q_0 &= \beta n_0, \\ q_1 &= \beta n_1, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где β — коэффициент пропорциональности. С помощью соотношений (5.15) и (5.16) можно теперь формуле (5.14) дать удобный для вычислений вид:

$$\Delta t = RC \ln \frac{n_0}{n_1}. \quad (5.17)$$

Сопротивление R и емкость C заданы как постоянные установки.

5.4. Описание опытной установки

Установка изображена схематически на рис. 5.2. Стальные шары P_1 и P_2 с целью установления плоскости колебаний подвешены оба на двух стальных проволоках. Расстояние между параллельными прямыми AA' и BB' , соединяющими точки крепления проволоки, равно диаметру шаров. Шары удерживаются в отклоненном положении с помощью электромагнитов M_1 и M_2 , обмотки которых соединены последовательно и питаются от выпрямителя, присоединяемого к клеммам MM . Для установления равных начальных отклонений шаров электро-

магниты можно перемещать. При размыкании с помощью переключателя K_1 цепи электромагнитов шары освобождаются и соударяются. Для осуществления прямого удара точки крепления проволок A и A' , B и B' можно перемещать. Смещение шаров от положения равновесия измеряется с помощью шкалы S .

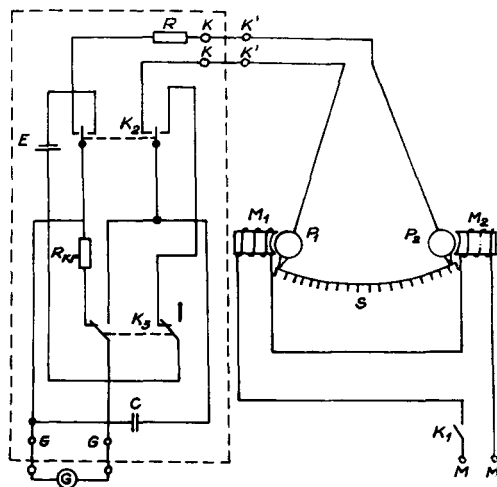


Рис. 5.2. Схема опытной установки.

С помощью трехположного переключателя K_2 можно обкладки конденсатора соединять с элементом E или через резистор R с шарами P_1 и P_2 или же оставить совсем изолированными (среднее положение переключателя). Переключатель K_3 в одном положении соединяет клеммы гальванометра через резистор с критическим сопротивлением R_{kp}

(для тушения колебаний измерительной системы гальванометра), в другом положении его происходит разрядка конденсатора через гальванометр. В то же время размыкается цепь элемента.

5.5. Ход работы

5.5.1. С помощью винтовых ножек приводят штатив установки в вертикальное положение. При этом оба указателя, прикрепленные к шарам, в положении равновесия совпадают с нулевыми делениями шкалы S . Собирают цепь питания электромагнитов. Для этого соединяют с выпрямителем клеммы MM на правой стороне установки. Включают выпрямитель. Проверяют, хорошо ли сидят шары в гнездах электромагнитов, при необходимости поворачивают магниты в нужное положение. Выходное напряжение выпрямителя приводят к наименьшему значению, при котором шары еще удерживаются в гнездах электромагнитов. Выключают ток питания магнитов, проверяют, выполняется ли условие прямого удара (не должно возникать боковых колебаний, а также поворота плоскостей, образованных проволоками подвеса, до полного затухания колебаний). Если это не так, то надо отрегулировать точки крепления подвеса. При необходимости регулируют положение магнитов с тем, чтобы начальные смещения шаров были одинаковы.

5.5.2. Измеряют по шкале начальные (равные) смещения обоих шаров δ_1 . Освобождают шары и после 10 - 15 соударений измеряют δ_n для одного из шаров. Опыт повторяют m раз (см. дополнительное задание Е), измеряя δ_n поочередно для обоих шаров. Затем освобождают от магнита только один шар и измеряют амплитуду δ'_n после n полных колебаний. Опыт повторяют столько же раз, сколько и предыдущий. Результаты измерений оформляют в виде таблицы.

5.5.3. Собирают схему измерения времени соударения согласно рис. 5.2. Заряжают конденсатор, изолируют его с помощью переключателя K_2 , переключателем K_3 соединяют его с гальванометром и определяют показание гальванометра I_0 . Опыт повторяют опять m раз. Затем определяют остаточный заряд конденсатора после соударения. Для этого заряжают конденсатор, соединяют его с помощью переключателя K_2

с шарами и освобождают шары с помощью выключателя K_1 . После первого соударения переводят переключатель K_2 в среднее положение, переключателем K_3 соединяют конденсатор с гальванометром и регистрируют показание гальванометра n_1 . Опыт повторяют m раз. Результаты измерений вносят в ту же таблицу.

5.5.4. Для решения дополнительного задания 3 измеряют расстояние точек крепления проволок от шкалы S (длина L на рис. 5.1) и выясняют цену деления шкалы.

5.5.5. Обработав статистически результаты повторных измерений, вычисляют коэффициент восстановления по формуле (5.12) и время соударения по формуле (5.17) вместе с оценкой погрешностей опыта.

5.6. Дополнительные задания

5.6.1. До практикума

А. Какие законы сохранения выполняются в случае абсолютно упругого и абсолютно неупругого удара? Какие из них выполняются в случае реального упругого удара?

Б. Что такое линия удара? Какой удар называют центральным, какой прямым?

В. Чему равен коэффициент восстановления при абсолютно упругом и абсолютно неупругом ударе?

Г. Выразить относительную потерю энергии через коэффициент восстановления в условиях нашего опыта.

Д. Представить детальный вывод формулы (5.5).

Е. Для оценки случайной погрешности при измерении величин δ_n , δ'_n , n_0 и n_1 желательно пользоваться тестом знаков [1, 2]. Пользуясь таблицей критических квантилей теста знаков, установить число измерений m (см. п. 5.5), при котором удобно оценить погрешность на уровне доверительной вероятности 95 %.

Ж. Почему нужно прервать цепь гальванического элемента, когда конденсатор разряжают через гальванометр?

5.6.2. После практикума

3. Представить оценку относительной методической погрешности, обусловленной упрощением формулы (5.7), при определении величины K в нашем опыте.

К. Представить оценку методической погрешности при определении величины K без учета трения при движении шаров между соударениями.

5.7. Литература

1. Tammet H. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Tln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воолайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме.- Тарту: ТГУ, 1987. - 60 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1973. I.- § 30.
4. Физический практикум: Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И. Ивероновой. - М.: Наука, 1967. - Зад. 18.

6. ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КРЕСТОВОГО МАЯТНИКА

6.1. Задание

Ознакомление с динамическим методом определения момента инерции тела, имеющего неподвижную ось вращения, проверка основного уравнения динамики вращения и теоремы Штейнера.

6.2. Принадлежности

Крестовый маятник с грузом для приведения его во вращение и электромагнитным тормозом, автоматическое устройство с электрическим секундомером для измерения времени опускания груза, треугольник, штангенциркуль.

6.3. Описание установки и теория

Крестовый маятник состоит из вала, на которой закреплены два шкива разного диаметра, и двух взаимно перпендикулярных стержней, на которые насажены и могут по ним перемещаться цилиндрические тела A_1 , A_2 , A_3 и A_4 (рис. 6.1) одинаковой массы m_1 . Для закрепления этих тел в нужном положении на стержнях имеются углубления на расстоянии 1 см друг от друга. К оси прикреплен конец шнура, который можно по желанию наматывать на тот или другой шкив. К другому концу шнура подвешивают груз B массой m . Ось маятника закреплена в подшипниках, на кронштейне. На кронштейне укреплен еще электромагнитный тормоз для фиксирования маятника в определенном положении, когда шнур намотан на шкив и груз поднят, и для освобождения его. Под маятником находится прикрепленная к стене платформа-амортизатор C для торможения груза B . На концах стержней

маятника имеются винты a_1, \dots, a_4 , назначение которых задержать случайно освободившийся цилиндр A_i .

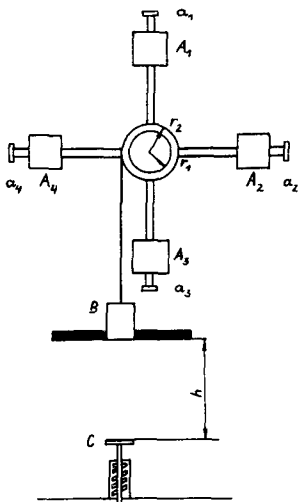


Рис. 6.1. Крестовый маятник.

Для математического описания движения системы, состоящей из крестового маятника и подвешенного груза, надо записать уравнение движения для обеих частей в отдельности. Пусть груз B будет поднят на высоту h над платформой C (до штриха на стене) (рис. 6.1). Так как цилиндры A_i закреплены на одинаковом расстоянии от оси вращения, то маятник будет в безразличном равновесии и на его движение будут влиять только моменты силы натяжения шнура и силы трения. Записав относительно маятника уравнение моментов (в скалярной форме), а относительно груза B основное уравнение динамики посту-

пательного движения получим:

$$\left. \begin{aligned} J\varepsilon &= Tr - M_{тр}, \\ ma &= mg - T, \\ a &= \varepsilon r. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

В этих уравнениях J — момент инерции крестового маятника, ε — его угловое ускорение, r — радиус шкива, T — сила натяжения шнура, $M_{тр}$ — момент сил трения, действующих на систему, относительно оси вращения, m — масса груза B , a — ускорение, с которым опускается груз B , g — ускорение силы тяжести. Дополнительно к уравнениям динамики в системе (6.1) фигурирует еще кинематическое соотношение между ускорением груза a и угловым ускорением маятника ε . Решая систему, можно получить выражение для ускорения a :

$$a = \frac{g - \frac{M_{mp}}{mz}}{\frac{J}{mz^2} + 1} = \frac{(g - \frac{M_{mp}}{mz}) mz^2}{J + mz^2}. \quad (6.2)$$

Отсюда легко увидеть, как ускорение груза B зависит от момента инерции крестового маятника, радиуса шкива, массы груза B и момента сил трения (см. дополнительное задание $Ж$).

Так как ускорение a груза B просто определяется из эксперимента по высоте h и времени t его опускания:

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (6.3)$$

то из решения (6.2) системы уравнений (6.1) можно получить формулу для вычисления момента инерции крестового маятника:

$$J = \frac{md^2}{8h} (gt^2 - 2h). \quad (6.4)$$

В этой формуле вместо радиуса шкива z введен его непосредственно измеряемый диаметр d , трение не учтено.

Обозначим через R расстояние от центра масс цилиндров A_i до оси вращения и найдем выражение для момента инерции J крестового маятника:

$$J = J_0 + 4J_1, \quad (6.5)$$

где J_0 — момент инерции пустого маятника (без цилиндров A_i), а J_1 — момент инерции одного цилиндра относительно оси маятника. Согласно теореме Штейнера:

$$J_1 = J_{10} + m_1 R^2, \quad (6.6)$$

$$J = J_0 + 4J_{10} + 4m_1 R^2 = J'_0 + 4m_1 R^2. \quad (6.7)$$

В последнем выражении m_1 — масса одного цилиндра A_i , $J'_0 = J_0 + 4J_{10}$, значение символа J_{10} выяснится из решения дополнительного задания $В$. Из формулы (6.7) видно, что момент инерции крестового маятника должен зависеть

линейно от величины R^2 . Опытная проверка этого положения служит проверкой выполнимости теоремы Штейнера.

Для проверки скалярного уравнения моментов можно воспользоваться данными опытов с различными по диаметру шкивами при одном и том же значении момента инерции маятника. Без учета трения можно из первого и третьего уравнения системы (6.1) записать для каждого шкива:

$$\left. \begin{aligned} J a_1 &= T_1 r_1^2, \\ J a_2 &= T_2 r_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Заменой натяжения шнура T из второго уравнения системы (6.1), а ускорения a из соотношения (6.3), система (6.8) приводится к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2Jh}{r_1^2} &= m(g t_1^2 - 2h), \\ \frac{2Jh}{r_2^2} &= m(g t_2^2 - 2h). \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Разделив эти равенства по частям одно на другое, получим:

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{g t_1^2 - 2h}{g t_2^2 - 2h}. \quad (6.10)$$

Индексы 1 и 2 в этом соотношении означают произвольно выбранные номера шкивов. Проверка последнего соотношения (в пределах погрешностей опыта) и явится проверкой уравнения моментов. Если $g t_i^2 \gg 2h$, то из формулы (6.10) вытекает, что время опускания груза B при одинаковом значении момента инерции маятника приблизительно обратно пропорционально диаметру шкива.

Основной измерительной операцией в данном опыте является измерение времени опускания груза B . Для достижения большей точности используется автоматическая измерительная система, принципиальная схема которой приведена на рис. 6.2. После включения сетевого напряжения клеммы D синхронного двигателя электрического секундомера остаются под напряжением сети, мотор работает. Через трансформатор

подается напряжение и на выпрямитель, конденсатор C заряжен. Если включить тумблер "АУТОМАТ" и кратковременно нажать на кнопку "КАІК", то через обмотку реле K пройдет ток, один из замыкающихся при этом контактов (K_2) включает электромагнитное сцепление секундомера (клеммы ЭМ), второй (K_1) дублирует кнопку "КАІК".

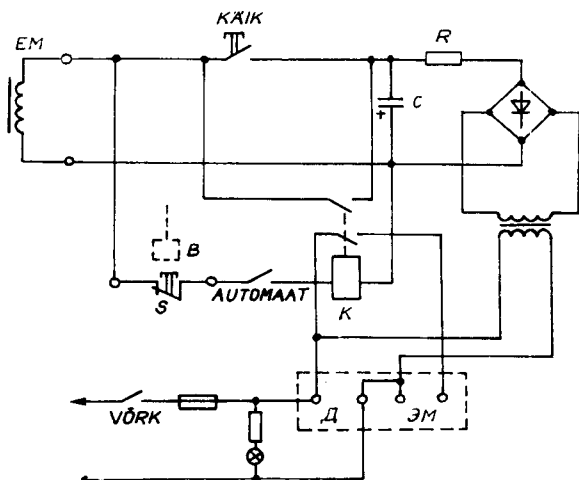


Рис. 6.2. Принципиальная схема автоматического устройства измерения времени.

Одновременно с пуском секундомера включают ток в обмотку электромагнитного тормоза EM . Резистор R ограничивает ток в обмотке тормоза, конденсатор C введен с целью сокращения времени реакции тормоза (при включении через обмотку тормоза проходит импульс тока частичной разрядки конденсатора). Ударившись о платформу C груз B размыкает на короткое время контакт S , контакты реле освобождаются и секундомер останавливается. Одновременно тормозится и вращение маятника.

Для приведения установки в состояние готовности надо освободить тормоз, не включая секундомер. Это можно сделать с помощью кнопки "КАІК" при выключенном тумблере "АУТОМАТ".

Расстояние h , на которое опускается груз B (рас-

стояние между штрихом на стене и верхней поверхностью платформы), а также масса m груза B даются как постоянные установки.

6.4. Ход работы

6.4.1. Закрепив цилиндры A_i на выбранном расстоянии от оси, следует каждый раз убедиться в том, что маятник находится в безразличном равновесии, приподняв рукой груз B . Если безразличное равновесие нарушено (причиной этому могут быть не совсем точно расположенные углубления на стержнях), надо его исправить.

Уравновешивать маятник следует в двух разных положениях, причем в обоих случаях один стержень должен быть в горизонтальном, другой – в вертикальном положении. Для регулировки равновесия используют те же цилиндры A_i , повернув в обоих случаях один из них вокруг стержня на 90° (зачем?) и переместив немного. При этом перемещение в любом случае не должно превышать 1 мм. Учитывая и неточность сверления углублений, предельную погрешность расстояния R принимают равной 2 мм.

Равновесие надо проверить каждый раз после перемещения цилиндров.

6.4.2. В отдельных опытах измеряется время опускания груза B . Чтобы поднять груз на начальную высоту, освобождают тормоз. Это можно делать электрически, выключив автоматическую систему и нажав кнопку "КЛК". Однако, чтобы избежать перегрева обмотки магнита и освободить обе руки, целесообразно освобождать тормоз механически, введя в пространство между сердечником магнита и корпусом клин. После этого наматывают шнур на один из шкивов, укладывая витки каждый рядом с предыдущим (см. дополнительное задание Г) до тех пор, пока нижняя поверхность груза B не окажется на уровне штриха на стене. При наматывании шнура на шкив следует вращать маятник в таком направлении, чтобы при опускании груз B упал на платформу C в ее середине. Теперь отпускают тормоз в рабочее состояние, уточняют начальное положение груза B с помощью прямоугольного треуголь-

ника, включают тумблер "АУТОМАТ" и нажимают на кнопку "ПУСК". Время опускания груза B измеряется автоматически.

6.4.3. Время опускания груза B измеряют по меньшей мере при пяти различных расстояниях R цилиндров A_i от оси, наматывая шнур на один из шкивов. При одном из значений R проводят опыты с обоими шкивами, чтобы получить данные для проверки уравнения моментов. С целью возможности оценки и уменьшения случайной погрешности при всех фиксированных условиях опыта измеряют время по меньшей мере пять раз. Если для обработки данных решено пользоваться тестом знаков, то число повторных опытов следует выбрать согласно таблице теста знаков [1, таблица 35.4 или 2, таблица 4.3].

6.4.4. Измеряют диаметры шкивов с помощью штангенциркуля. По требованию руководителя практикума измеряют все величины, необходимые для решения дополнительного задания 3.

Все данные измерений вносят в рационально составленную таблицу (см. дополнительное задание Е).

6.4.5. Обработав результаты повторных измерений времени статистически с помощью теста знаков или теста Стьюдента, вычисляют по формуле (6.4) значения моментов инерции маятника и их предельные погрешности. Результаты вычислений вносят в таблицу, например, по форме 6.1.

Таблица 6.1

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
R_i					
J_i					
$\frac{\Delta J_i}{J_i}$					
ΔJ_i					
$J_i \pm \Delta J_i$					

По данным таблицы строят график J, R^2 . На плоскость наносят все экспериментальные точки вместе с крестами предель-

ных погрешностей. Если через эти кресты удастся провести прямую, то этим будет доказана справедливость теоремы Штейнера в пределах точности наших опытов (см. формулу (6.7)).

По начальной ординате и крутизне прямой определяют входящие в формулу (6.7) величины J_0' и m , вместе с их предельными погрешностями. Полученное значение m сравнивают с постоянной установки.

6.4.6. Вычисляют значения отношений, стоящих в обеих половинах равенства (6.10), вместе с их предельными погрешностями. Если равенство в пределах погрешностей будет выполняться, то это будет означать, что в пределах погрешностей наших опытов выполняется уравнение моментов.

6.5. Дополнительные задания

6.5.1. До практикума

А. Сформулировать скалярное уравнение моментов, дать определения момента инерции материальной точки и твердого тела.

Б. Вывести формулы (6.2) и (6.4).

В. Какой смысл имеют величины J_{10} и J_0' , входящие в формулы (6.6) и (6.7)?

Г. Почему нельзя наматывать шнур на шкив случайным образом, так что витки могут оказаться в куче один на другом?

Д. Которому из шкивов следует отдать предпочтение в целях точности измерений при проверке теоремы Штейнера? Предполагается, что абсолютная погрешность при измерении как d , так и t не зависит от значения измеряемой величины.

Е. Разработать форму таблицы для времени t , диаметров шкивов d и расстояния R цилиндров A_i от оси вращения.

6.5.2. После практикума

Ж. Давая величинам J , z и m значения в пределах опытных значений, вычислить и представить графически зависимости $a = a(J)$, $a = a(z)$ и $a = a(m)$ по формуле (6.2). При построении одного графика считать все другие величины постоянными. Вычисления сделать на ЭВМ.

3. Оценить методическую погрешность, возникающую вследствие пренебрежения трением.

Предположить, что трение сухое и момент трения скольжения равен максимальному значению момента трения покоя. Для приближенного определения последнего намотать 5-6 витков шнура на один из шкивов, пропустить в отверстие на шкиве дополнительный шнур с узлом на конце, к другому концу которого привязано легкое ведерко, после этого размотать 2-3 витка основного шнура так, чтобы дополнительный шнур намотался на шкив в обратном направлении. Поднять груз B так, чтобы длина висящей части шнура оказалась приблизительно равной длине дополнительного шнура. Таким образом исключается влияние массы шнура. Начать сыпать в ведерко тонкой струйкой песок до тех пор, пока маятник не придет во вращение. Взвесить ведерко с песком. Опыт повторить по меньшей мере пять раз, изменяя случайно ориентацию стержней маятника. Вычислить среднее значение момента силы, необходимого для преодоления момента силы трения покоя.

Вывести уточненную формулу для вычисления момента инерции (формула (6.4) с учетом трения), оценить методическую погрешность момента инерции, возникающую от пренебрежения трением.

6.6. Литература

1. Таммет Н. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Tln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воолайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТТУ, 1963. - 55 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1973. - I. - §§ 36, 38.
4. Физический практикум: Механика и молекулярная физика/ Под ред. В.И. Ивероновой. - М.: Наука, 1967. - С.92-95.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ С ПОМОЩЬЮ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

7.1. Задание

Определение момента инерции геометрически правильных тел с помощью трифилярного подвеса и проверка теоремы Штейнера.

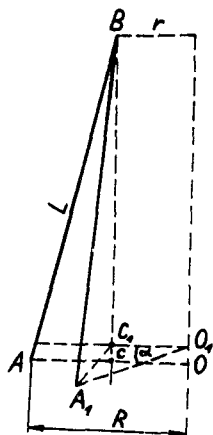
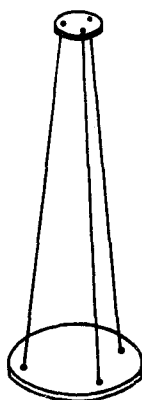
7.2. Принадлежности

Трифилярный подвес, электронный секундомер, снабженный фотоэлектрическим датчиком положения, штангенциркуль, технические весы, разновес, исследуемые тела.

7.3. Описание установки и теория метода

Трифилярный подвес представляет собой круглую горизонтальную платформу, подвешенную на трех симметрично расположенных нитях (рис. 7.1). Вверху нити прикреплены также симметрично к горизонтальному диску несколько меньших размеров, чем платформа, так, что центры этого диска и платформы лежат на одной вертикали. Платформа может совершать крутильные колебания вокруг оси, совпадающей с отмеченной вертикалью. Колебания создаются поворотом верхнего диска с помощью специального механизма. Центр масс платформы перемещается при этом вдоль оси. Период колебаний определяется отношением момента инерции платформы и силы тяжести, действующей на нее, которое изменяется, если платформу нагрузить каким-нибудь телом.

Выберем в качестве обобщенной координаты для описания движения платформы угол α поворота ее относительно положения равновесия. На рис. 7.2 точка O — центр платформы, отрезок AO — линия пересечения платформы с плоскостью рисунка в положении равновесия трифилярного подвеса, BA — од-



7.1. Трифилярный подвес.

Рис. 7.2. Нить в двух положениях.

на из нитей подвеса в том же его положении. Линию пересечения платформы, повернутой на угол α и поднятой на высоту $h = OO_1 = C_1C_1$, с плоскостью рисунка отображает отрезок C_1O_1 , а положение нити подвеса при этом — BA_1 .

При рассмотрении колебательного движения для выяснения характера колебаний и вывода формулы периода колебаний можно либо, исходя из основного закона динамики (II закон Ньютона, уравнение моментов), выписать дифференциальное уравнение движения, либо (пренебрегая трением) записать уравнение энергии по закону сохранения механической энергии. В настоящем случае проще воспользоваться уравнением энергии. При крутильных колебаниях платформа, повернутая на угол α и поднятая на высоту h , обладает кинетической энергией:

$$W_k = \frac{1}{2} J \Omega^2, \quad (7.1)$$

потенциальная энергия ее

$$W_n = mgh. \quad (7.2)$$

В этих формулах m и J суть соответственно масса и момент инерции платформы (если она нагружена, то вместе с этими телами) относительно оси вращения, Ω — угловая скорость, g — ускорение силы тяжести. Угловая скорость есть производная по времени от угла поворота: $\Omega = \dot{\alpha}$. На основании закона сохранения энергии (без учета трения) можно записать уравнение энергии:

$$\frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + mgh = \text{const.} \quad (7.3)$$

Это уравнение содержит, кроме обобщенной координаты α , еще и другую величину h , зависящую от времени. Ее надо выразить через α .

На рис. 7.2 легко увидеть, что

$$h = OQ_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}.$$

Так как

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = L^2 - (R - r)^2,$$

а

$$(BC_1)^2 = (BA_1)^2 - (A_1C_1)^2 = L^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha),$$

то

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1} = \frac{2Rr \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{BC + BC_1}. \quad (7.4)$$

Обозначив расстояние между платформой и верхним диском в положении равновесия $BC = H$, можно в силу условия $L \approx H \gg R$ сумму, стоящую в знаменателе, принять равной $2H$ (см. дополнительное задание В). Учитывая это, можно уравнение энергии переписать в виде:

$$\frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \frac{2Rr mg}{H} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \text{const.}$$

Разделив обе стороны его на $\frac{1}{2} J$, получим:

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{4 R z m g}{H J} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \text{const.} \quad (7.5)$$

Уравнение энергии гармонически колеблющейся системы имеет следующий общий вид:

$$\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = \text{const.}, \quad (7.6)$$

где x — общее обозначение обобщенной координаты, ω_0 — круговая частота собственных колебаний системы. Сравнение уравнений (7.5) и (7.6) показывает, что колебания трифилярного подвеса не являются гармоническими. При малых смещениях ($\alpha \ll 1$) можно считать

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2},$$

уравнение энергии (7.5) примет тогда вид:

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{R z m g}{H J} \alpha^2 \approx \text{const.} \quad (7.7)$$

Сравнение уравнений (7.6) и (7.7) дает:

$$\omega_0^2 = \frac{4 \pi^2}{T_0^2} = \frac{R z m g}{H J}. \quad (7.8)$$

Отсюда видно, что период колебаний трифилярного подвеса действительно определяется отношением момента инерции платформы и силы тяжести, действующей на нее. Из соотношения (7.8) вытекает формула для определения момента инерции платформы:

$$J = \frac{R z m g}{4 \pi^2 H} T_0^2. \quad (7.9)$$

По этой формуле можно вычислить как момент инерции J ненагруженной платформы, так и момент инерции J платформы, нагруженной каким-нибудь телом, так как все величины, стоя-

щие по правую сторону знака равенства, могут быть измерены непосредственно. Платформу можно нагружать только телами, имеющими ось симметрии, и только таким образом, чтобы эта ось симметрии совпадала с осью вращения (см. дополнительное задание Г). Момент инерции тела J_T выразится тогда (из определения момента инерции механической системы) следующим образом:

$$J_T = J - J_0 \quad (7.10)$$

Итак, оказывается возможным использование трифилярного подвеса для измерения моментов инерции тел относительно оси симметрии их. Но платформу можно нагрузить и несколькими одинаковыми телами произвольной формы, расположив их симметрично относительно центра платформы (см. дополнительное задание Г). Разделив результат, полученный из формулы (7.10), на число тел, получим момент инерции одного тела относительно оси вращения платформы. По теореме Штейнера тогда можно вычислить и момент инерции тела относительно любой другой оси, параллельной ей. Такой же прием используется для проверки теоремы Штейнера. Для этого определяют момент инерции J_1 одного симметричного тела относительно оси симметрии, затем кладут несколько таких тел симметрично на платформу и определяют вышеописанным образом момент инерции одного тела относительно оси вращения платформы J_1' . Если расстояние между осями симметрии тел и осью вращения платформы было d , то по теореме Штейнера должно выполняться соотношение

$$J_1' = J_1 + Md^2 \quad (7.11)$$

где M — масса одного тела.

Для измерения периода колебаний пользуются электронным секундомером, снабженным фотоэлектрическим датчиком положения. Световой поток датчика прерывается жестяной стрелкой, прикрепленной к краю платформы. Секундомер позволяет измерять автоматически время, в течение которого подвес совершает произвольное число колебаний, задаваемое экспериментатором.

ром. Руководство пользования секундомером находится на рабочем месте. Во избежание чрезмерного увеличения методической погрешности, обусловленной сделанными при выводе уравнения (7.7) упрощениями, не следует задавать первоначальную амплитуду колебаний платформы более 10^0 (см. дополнительное задание 3).

Как постоянные установки, даются значения величин z и H , а также масса ненагруженной платформы m_0 .

7.4. Ход работы

7.4.1. С помощью штангенциркуля измеряют расстояние R точек крепления нитей от оси вращения на нижней платформе (от центра платформы). Измеряют расстояние для всех трех нитей и за R принимают среднее арифметическое трех измерений. Отклонения результатов одиночных измерений от среднего считают случайными погрешностями измерений и с помощью теста Стьюдента вычисляют случайную погрешность среднего арифметического.

7.4.2. Устанавливают фотодатчик электронного секундомера, руководствуясь инструкцией к нему. Приводят диск в полную неподвижность, что уменьшает до минимума случайные погрешности автоматического измерения времени (см. дополнительное задание Ж). Это следует делать каждый раз перед сообщением подвесу колебательного импульса с целью измерения периода. Прежде чем приступить к измерениям, надо потренироваться, чтобы при сообщении системе колебательного импульса амплитуда не превысила 10^0 . Для приближенной оценки амплитуды пользуются нанесенными на платформу радиальными прямыми, делящими круг на равные части, и вертикальным стержнем, который можно поставить у края платформы.

7.4.3. Вычисляют предельные относительные погрешности величин m_0 , g , R , z и H , входящих в формулу (7.9). Измеряют время одного полного колебания ненагруженной платформы по меньшей мере 10 раз и вычисляют среднеквадратичную погрешность единичного измерения [2, формула (4.5)]. В предположении, что случайная погрешность распределяется нормально, двойное значение среднеквадратичной ошибки дает

предельную случайную погрешность единичного измерения на уровне доверительной вероятности 96 % [I, таблица 34.6.I]. Так как инструментальная погрешность для секундомера определяется чисто случайной погрешностью дискретизации (единица последнего десятичного знака номерного табло), то полученная оценка содержит и инструментальную погрешность секундомера. Эта предельная абсолютная погрешность не зависит от продолжительности измеряемого времени, относительная же погрешность уменьшается с ростом промежутка времени. Поэтому при определении периода колебаний полезно измерять продолжительность не одного, а n колебаний. Период колебаний в этом случае равен $T = \frac{t}{n}$, а относительная погрешность периода уменьшается в n раз:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta t}{nT}.$$

Вычисляют число колебаний n , при измерении продолжительности которых возникающая удвоенная предельная относительная погрешность (почему удвоенная?) была бы в 5...10 раз меньше предельной погрешности любой другой величины, входящей в формулу (7.9). Так как значение периода во всех опытах есть величина одного и того же порядка, то в дальнейшем измеряют продолжительность найденного числа колебаний два раза. Одно измерение считают основным, другое – для проверки того, что отклонение не превышает найденную оценку погрешности. Если это в некоторых опытах не так, то следует в этих случаях сделать серию повторных измерений.

7.4.4. Определяют момент инерции пустой платформы, измерив время n колебаний и пользуясь формулой (7.9).

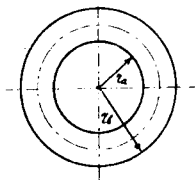
7.4.5. По выбору руководителя практикума измеряют моменты инерции J_{T1} и J_{T2} двух тел из комплекта исследуемых тел (диск, кольцо, четырехугольная и треугольная пластины) относительно оси, проходящей через их центр масс. Для этого определяют момент инерции платформы, нагруженной этими телами, как это предписано в п. 7.4.4, вычисляют J_T по формуле (7.10). Масса M этих тел измеряется взвешиванием на технических весах. Тела располагают на платформе так,

чтобы их центр масс и центр платформы находились на одной вертикали. Такое расположение облегчается концентрическими окружностями, нанесенными на платформу. После этого определяют суммарный момент инерции $J_{T,1+2}$ обоих тел относительно оси, проходящей через их центры масс, поместив оба эти тела на платформу. Вычисляют погрешности результатов и проверяют справедливость выражения момента инерции системы в пределах погрешности опыта:

$$J_{T,1} + J_{T,2} = J_{T,1+2}.$$

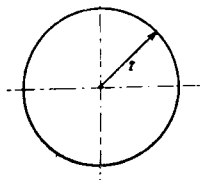
Вычисляют моменты инерции измеренных тел относительно оси, перпендикулярной к их плоскости и проходящей через центр масс, теоретически по нижеприведенным формулам и находят их сумму. Линейные размеры измеряют с помощью штангенциркуля.

Кольцо



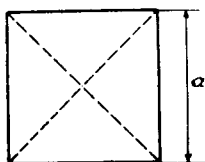
$$J_T^0 = \frac{1}{2} M (r_a^2 + r_c^2)$$

Диск

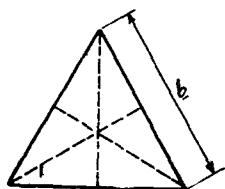


$$J_T^0 = \frac{1}{2} M r^2$$

Квадрат



$$J_T^0 = \frac{1}{6} M a^2$$



$$J_T = \frac{1}{12} M b^2$$

Результаты измерений и вычислений оформляют в виде таблицы, например, по форме 7.1.

Таблица 7.1

№ пп.	Тело	Масса	Размеры	Время колебаний	Момент инерции (кг·м ²)	
					Эксперим.	Теор.
1	Квадрат	$a =$	$J_{T,1}^3 = (\pm)$	$J_{T,1}^T = (\pm)$
2	Диск	$b =$	$J_{T,2}^3 = (\pm)$	$J_{T,2}^T = (\pm)$
					$J_{T,1}^3 + J_{T,2}^3 =$ $= (\pm)$	$J_{T,1}^T + J_{T,2}^T =$ $= (\pm)$
3	Квадрат + диск	—		$J_{T,1+2}^3 = (\pm)$	—

Если последние три числа в правом нижнем углу таблицы совпадут, то это будет доказательством правильности измерений, вычислений и формулы момента инерции.

7.4.6. Для проверки теоремы Штейнера пользуются маленькими дисками одинаковых размеров и одинаковой массы, как это описано в конце п. 7.3. Так как момент инерции этих дисков относительно оси симметрии меньше момента инерции платформы, то при пользовании формулой (7.10) возникает большая погрешность. Опыт следует поставить согласно решению дополнительного задания Е.

Во второй части опыта диски кладут на платформу симметрично относительно оси вращения. Такое расположение об-

легчается радиальными прямыми и концентрическими окружностями, нанесенными на платформу. Расстояния центров дисков от оси вращения измеряют с помощью штангенциркуля как средние расстояний от центра платформы до ближнего и дальнего края диска.

В пределах погрешностей опыта должно выполняться соотношение (7.11).

7.4.7. Из теории известно, что моменты инерции прямоугольного параллелепипеда относительно его осей симметрии 1, 2 и 3 (рис. 7.3) выражаются следующим образом:

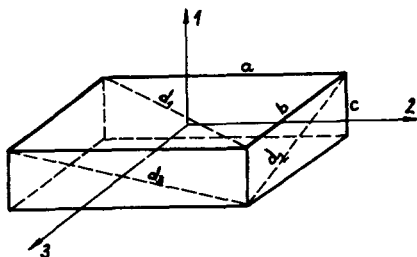


Рис. 7.3. Прямоугольный параллелепипед.

$$J_1 = M \frac{a^2 + b^2}{12},$$

$$J_2 = M \frac{b^2 + c^2}{12},$$

$$J_3 = M \frac{a^2 + c^2}{12}.$$

С помощью геометрических преобразований можно просто перейти от квадратов ребер к квадратам диагоналей граней параллелепипеда и получить

$$J_1 : J_2 : J_3 = d_1^2 : d_2^2 : d_3^2. \quad (7.12)$$

Определяют моменты инерции металлического прямоугольного параллелепипеда относительно всех трех осей симметрии его. Для этого кладут параллелепипед на платформу так, что-

бы центр его грани совпадал с центром платформы во всех трех случаях. Измеряют длины диагоналей. Проверяют, выполняется ли соотношение (7.12) в пределах погрешностей.

7.5. Дополнительные задания

7.5.1. До практикума

А. Дать определение момента инерции материальной точки и твердого тела, сформулировать теорему Штейнера.

Б. Трифилярный подвес совершает крутильные колебания. Показать, каково происхождение возвращающего момента силы, всегда направленного к положению равновесия. Обосновать выбор в настоящем руководстве в качестве исходного уравнения энергии, а не дифференциального уравнения движения.

В. Исследуя экспериментальную установку, выяснить, начинается ли величина H расстояние между горизонтальными плоскостями, определяемыми диском и платформой.

Г. Почему разрешается класть на платформу только тела, имеющие ось симметрии, или одинаковые тела симметрично относительно центра платформы, т.е. почему напряжение нитей должно быть одинаковым?

Д. Из анализа формулы (7.10) установить пределы применимости трифилярного подвеса для измерения момента инерции тел \mathcal{J}_T — можно ли с достаточной степенью точности измерять сколь угодно малые \mathcal{J}_T ?

Е. Как можно повысить точность определения момента инерции одного диска относительно оси симметрии в опыте по проверке теоремы Штейнера? (Используется обстоятельство, что все диски идентичны.)

Ж. Объяснить, как боковые колебания платформы вызывают возникновение случайной погрешности помехи при определении периода крутильных колебаний.

7.5.2. После практикума

З. Проверить, можно ли не учитывать при вычислении момента инерции методическую погрешность, возникающую в результате упрощения $\delta \ln \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ (формулы (7.6) и (7.7)) в конце п. 7.3 настоящего руководства при условии $\alpha < 10^0$, т.е.

будет ли относительная методическая погрешность по меньшей мере в 10 раз меньше суммарной относительной погрешности измерений.

Для этого следует воспользоваться известным из теории точным решением уравнения (7.5), из которого выводится уточненная формула периода колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{HJ}{Rzmg}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \right).$$

Ограничившись первыми двумя членами этого бесконечного ряда, вывести уточненную формулу для вычисления момента инерции:

$$J = \frac{Rzmg}{4\pi^2 H} \cdot T_0^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}. \quad (7.13)$$

Если можно принять $\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \approx 0$, то формула (7.13) перейдет в формулу (7.9) и колебания можно считать гармоническими. Относительная погрешность, вытекающая из такого упрощения, будет

$$\frac{\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}} \approx \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}.$$

И. Оценить относительную методическую погрешность определения момента инерции, возникающую в результате замены $BC_1 \approx BC$, сделанной в формуле (7.4).

7.6. Литература

1. Tammet H. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Tln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воодайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТГУ, 1987. - 60 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1973. - I. - §§ 27, 39, 40.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Механика. - М.: Наука, 1979. - §§ 39, 40, 42.
5. Физический практикум: Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И. Ивероновой. - М.: Наука, 1967. - Зад. II.

8. ИЗУЧЕНИЕ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА

8.1. Задание

Ознакомление с элементарной теорией гироскопа, определение скорости прецессии и скорости вращения гироскопа.

8.2. Принадлежности

Гироскопическая установка, ее ротор (гироскоп), эталонный цилиндр, стальная проволока, амперметр, источник постоянного напряжения, секундомер, штангенциркуль, технические весы, разновес.

8.3. Теоретическое введение

Гироскопом называют быстро вращающееся твердое тело, ориентация оси вращения которого в пространстве может изменяться. Гироскопами можно считать, например, вращающиеся небесные тела, артиллерийские снаряды, роторы турбин и т.п. В современной технике гироскоп является существенным элементом во многих гироскопических установках. Используются эти установки для автоматического управления самолетами, кораблями, торпедами, ракетами и др., для определения курса в навигации и т.п. Чтобы гироскоп мог свободно поворачиваться, ось его связывают обычно с кольцом, которое в свою очередь помещено внутрь другого кольца, причем оба эти кольца могут вращаться вокруг взаимно перпендикулярных осей (рис. 8.1). Такую систему крепления называют кардановой. Гироскоп с кардановой системой крепления имеет три степени свободы и может совершать любые повороты относительно точки пересечения осей (неподвижной точки). Если центр масс гироскопа совпадает с точкой пересечения осей, то гироскоп является уравновешенным. Если ось вращения гироскопа совпадает с его осью симметрии, то гироскоп называют симмет-

ричным.

Будем рассматривать уравновешенный симметричный гироскоп. По основному закону динамики вращательного движения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (8.1)$$

где \vec{L} — момент импульса гироскопа, а \vec{M} — момент внешних сил относительно неподвижной точки. Если нет внешних сил (или моменты их уравновешены)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad (8.2)$$

При таком условии гироскоп называют свободным.

Вектор момента импульса симметричного тела относительно его оси симметрии можно выразить через вектор угловой скорости вращения вокруг этой оси

$$\vec{L} = J\vec{\omega},$$

где J — момент инерции гироскопа относительно оси симметрии.

Рис. 8.1. Гироскоп с кардановым креплением.

В случае свободного гироскопа из (8.2) следует

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const}. \quad (8.3)$$

Таким образом, вектор угловой скорости, а следовательно, и ориентация оси вращения в пространстве в случае свободного гироскопа с постоянным моментом инерции и тремя степенями свободы остаются неизменными. Из уравнения (8.1) легко установить, что ориентация оси гироскопа не изменится также от кратковременных сильных ударов (см. дополнительное задание В).

Кардановое крепление не единственная возможность осу-

щества гироскопа с тремя степенями свободы. В системе, изображенной на рис. 8.2, гироскопом является массивный вращающийся диск, ось вращения которого O_1O_2 осуществлена в виде тонкого твердого стержня. Стержень этот в точке O_1 шарнирно укреплен на вертикальной стойке и может совершать (в пределах ограниченного телесного угла) любые повороты вокруг точки M . Уравновешивающий груз K можно перемещать вдоль оси с тем, чтобы выполнилось условие

$$P_1 x_1 = P_2 x_2, \quad (8.4)$$

где P_1 и P_2 — силы тяжести, действующие на диск и груз K ; x_1 и x_2 — расстояния центров масс этих тел от точки O_1 , при которых гироскоп оказывается уравновешенным и свободным (центр масс системы находится в точке O_1 , момент внешних сил относительно точки O_1 равен нулю). В приведенном рассуждении масса стержня считается ничтожно малой. Перемещение груза K выводит невращающийся гироскоп из

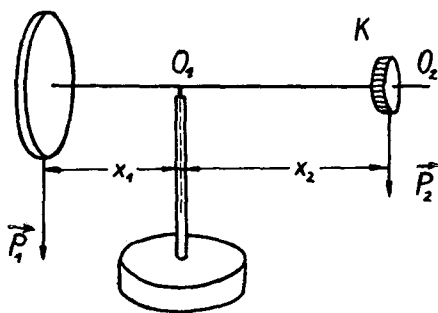


Рис. 8.2. Гироскоп с шарнирным креплением.

состояния равновесия. Совсем по-иному ведет себя вращающийся гироскоп. Рассмотрим гироскоп, начальное положение которого изображено на рис. 8.3, причем уравновешивающий

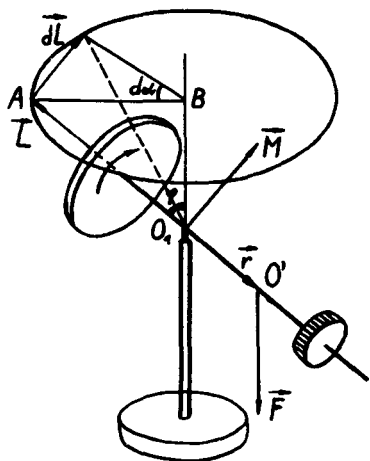


Рис. 8.3. Прецессирующий гироскоп.

груз смещен вправо по отношению к предыдущему его положению, и центр масс системы находится теперь в точке O' . Момент внешних сил

$$\vec{M} = [\vec{\rho}, \vec{F}], \quad (8.5)$$

где $\vec{\rho}$ — радиус-вектор точки приложения O' внешней силы \vec{F} относительно точки опоры гироскопа O_1 . Направление оси гироскопа по отношению к вертикали определяет угол φ . В данном случае

$$\vec{F} = P_1 + P_2,$$

вследствие чего

$$M = (P_1 + P_2) \rho \sin \varphi. \quad (8.6)$$

Из вышеприведенного основного уравнения динамики следует, что изменение момента импульса $d\vec{L}$ за время dt по направлению совпадает с моментом внешних сил:

$$d\vec{L} = \vec{M} dt, \quad (8.7)$$

Суммарный момент импульса по прошествии времени dt равен $\vec{L} + d\vec{L}$. Следовательно, изменится и ориентация оси вращения гироскопа. Обозначим отклонение оси за время dt через $d\alpha$. В течение следующего промежутка времени dt совершается такой же поворот и т.д. Ось гироскопа начинает вращаться вокруг вертикальной оси O_1B с некоторой угловой скоростью Ω , образуя при своем движении коническую поверхность. Такое движение гироскопа называется прецессией. Величина $\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$ называется угловой скоростью прецессии. Для вычисления угловой скорости прецессии можно исходить из уравнения (8.7), записав его скалярно (как соотношение между модулями):

$$dL = M dt. \quad (8.8)$$

Момент внешних сил выражается формулой (8.6). Модуль приращения момента импульса $d\vec{L}$ можно вычислить по рис.8.3:

$$dL = AB d\alpha = L \sin \varphi d\alpha.$$

Из формулы (8.8):

$$\begin{aligned} L \sin \varphi d\alpha &= (P_1 + P_2) z \sin \varphi dt, \\ \Omega = \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{(P_1 + P_2) z}{L} = \frac{(P_1 + P_2) z}{J\omega}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Из выведенной формулы видно, что с возрастанием скорости вращения гироскопа скорость прецессии его уменьшается. При постоянной угловой скорости вращения гироскопа величина Ω прямо пропорциональна расстоянию точки приложения внешней силы от неподвижной точки.

Задача настоящей работы и заключается в том, чтобы опытно проверить эту зависимость и определить скорость вращения гироскопа.

8.4. Описание и математическая модель установки

В настоящей работе в качестве гироскопа используется ротор мотора постоянного тока, имеющий большой момент инерции. К статору мотора коаксиально с ротором прикреплен стержень с делениями, вдоль которого может перемещаться уравнивающий груз. По другую сторону статора прикреплен стержень такого же направления с винтовой нарезкой, по которому может перемещаться (ограниченно) дополнительный уравнивающий груз. Статор, являющийся внутренним кольцом карданового крепления, прикреплен в подшипниках к внешнему кольцу, которое висит на длинной нити так, что ось вращения статора горизонтальна и конечно может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси вращения, определенной нитью подвеса. Свяжем систему отсчета с точкой пересечения трех осей вращения гироскопа O , ось X направим по оси вращения ротора (т.е. самого гироскопа) в направлении уравнивающего груза. Обозначим массу системы, состоящей из ротора, статора, стержней и дополнительного груза через m_1 , а положение его центра масс координатой x_1 , массу уравнивающего груза m_2 и координату его центра масс x_2 . Если расположить грузы так, что система окажется в равновесии при горизонтальном положении стержней, то центр масс всей системы будет находиться в точке O . По формуле координаты центра масс системы (см. дополнительное задание Г)

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \quad (8.I0)$$

Если переместить уравнивающий груз в положение, где координата его центра масс $x'_2 > x_2$, то центр масс всей системы сместится из точки O в направлении перемещения уравнивающего груза. Координата центра масс всей системы x_c выразится формулой:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.II)$$

С помощью равенства (8.I0) можно в выражении (8.II) избавиться от трудноопределимой величины x_1 и получить:

$$x_c = \frac{m_2 (x_2' - x_2)}{m_1 + m_2}. \quad (8.12)$$

Гироскоп теперь неуравновешен и начинает прецессировать. Полученное выражение можно ввести в формулу угловой скорости прецессии (8.9), заменив в ней силы тяжести соответствующими произведениями масс на ускорение силы тяжести:

$$\Omega = \frac{m_2 g (x_2' - x_2)}{J \omega} = \frac{m_2 g \Delta x}{J \omega}. \quad (8.13)$$

Δx означает смещение уравнивающего груза относительно того его положения, при котором вся система находится в равновесии. Из формулы (8.13) видно, что угловая скорость прецессии должна быть прямо пропорциональна этому смещению. Это следствие и предстоит проверить в пределах погрешности опыта.

8.5. Ход работы

8.5.1. Помещают уравнивающий груз в ближайшую к точке \mathcal{O} засечку и перемещением дополнительного уравнивающего груза на стержне с винтовой нарезкой приводят стержни в равновесие в горизонтальном их положении. Убирают из-под гироскопической установки подставку, в результате чего система оказывается висющей на нити подвеса. Собирают цепь питания мотора, соединив его клеммы с источником питания через амперметр. Для этого следует пользоваться длинными мягкими проводами, чтобы они, закручиваясь при прецессии гироскопа, оказывали по возможности меньшее тому противодействие. С разрешения руководителя практикума включают напряжение и повышают его постепенно так, чтобы сила тока не превысила (1,5...3) А, до достижения максимального значения 27 В, допустимого для мотора. Выжидают, пока не установится скорость вращения ротора, чему доказательством является стабилизация показания амперметра и высоты звука, издаваемого вращающимся ротором. В дальнейшем сила тока и

напряжение должны оставаться неизменными в течение всего опыта.

8.5.2. Ударяют слегка деревянной палочкой по стержню с делениями. Описывают происходящее явление и объясняют его. Как реагировал бы гироскоп на удар, направленный вертикально вниз, если бы вращение вокруг вертикальной оси было невозможным? Берутся обеими руками за стержни, пытаются повернуть систему вокруг вертикальной оси. Что при этом происходит? Почему? Описать и объяснить!

8.5.3. Устанавливают вблизи конца горизонтального стержня с делениями в уравновешенном состоянии гироскопа вертикальный металлический стержень и с помощью резинового кольца отмечают на нем высоту конца стержня гироскопа. Смещают уравновешивающий груз на несколько делений и наблюдают прецессирующий гироскоп в течение по меньшей мере одного полного оборота. Стержень должен бы оставаться горизонтальным (конус, описываемый осью прецессирующего гироскопа, должен бы иметь угол раствора 180°), заметно однако опускание конца оси. Причиной этого является момент упругих сил, возникающих при закручивании нити и проводов, вызывающий дополнительную прецессию вокруг горизонтальной оси. Измеряют ориентировочно величину опускания конца оси в течение одного полного оборота.

8.5.4. Измеряют период прецессии, пользуясь для этого либо электронным секундомером с фотоэлектрическим датчиком, либо управляемым вручную электрическим или механическим секундомером. В последнем случае следует запустить и остановить секундомер в моменты, когда конец стержня гироскопа проходит мимо вертикального стержня. Так как прецессия происходит довольно медленно, то можно получить достаточно точный результат, измерив время одного полного оборота. Если опускание конца стержня заметно, то следует каждый раз перед измерением периода отклонить стержень кверху на угол, равный половине того угла, на который он успевает опуститься в течение периода. Если скорость опускания стержня во время измерений начнет существенно увеличиваться, надо закрученные провода и нить раскрутить, поворачивая установку

осторожно, взявшись крепко двумя руками за статор.

Период прецессии измеряют по меньшей мере при семи разных положениях добавочного груза, измеряя каждый раз время одного полного оборота один раз. Для оценки случайной субъективной погрешности делают при самом коротком периоде (в целях экономии времени) 10 повторных измерений и вычисляют среднеквадратичную погрешность единичного измерения [2, формула (4.5)]. В предположении нормального распределение случайной погрешности удвоенное значение среднеквадратичной погрешности дает случайную предельную погрешность единичного измерения на уровне доверительной вероятности 96 % [1, таблица 34.6.1].

Вычисляют угловую скорость прецессии для всех значений $\Delta\chi$. Все данные измерений и результаты вычислений оформляют в виде таблицы (см. дополнительное задание Ж).

8.5.5. Для вычисления угловой скорости вращения гироскопа определяют массу уравнивающего груза и момент инерции гироскопа. Момент инерции определяют пользуясь ротором другой в точности такой же гироскопической установки. Ротор подвешивают на проволоке так, чтобы он мог совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс. Период колебаний определяют из 20–30 полных колебаний системы. После этого заменяют ротор цилиндром из однородного материала и поступают с ним аналогично предыдущему. Как известно, период таких крутильных колебаний вычисляется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad \text{и} \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{D}} \quad (8.14)$$

где J – момент инерции гироскопа, J_1 – момент инерции цилиндра и D – дирекционный момент.

Так как момент инерции однородного цилиндра легко вычислить по его линейным размерам и массе (см. дополнительное задание Е), то можно, исключив из уравнений (8.14) величину D , получить для вычисления момента инерции ротора формулу

$$J = \frac{T^2}{T_1^2} J_1. \quad (8.15)$$

Линейные размеры цилиндра и его массу измеряют с помощью штангенциркуля и технических весов. Взвешивают уравновешивающий груз.

8.5.6. Наносят значения Δx и Ω с крестами предельных погрешностей на рисунок в осях Δx , Ω . Если приведенная здесь элементарная теория гироскопа удовлетворяет нашему случаю, то можно провести прямую, проходящую через все кресты погрешностей.

Определяют крутизну полученной прямой K , решив для этого линейную регрессионную задачу либо графически, либо методом наименьших квадратов [1, п. 39.1, 39.2, 39.3; 2, п. 9] Зная величины K , m_2 , g и J , вычисляют скорость вращения гироскопа ω (формула (8.13)) и оценку предельной погрешности ее.

8.5.7. Если нет отдельного ротора, то определение момента инерции описанным методом невозможно. В таком случае следует непосредственно определить скорость вращения гироскопа, пользуясь тем обстоятельством, что через отверстия в статоре ротор виден вместе с нанесенными на него цифрами. Для измерения пользуются описанным в п. 4.3 руководства к 4-ой работе стробоскопическим источником света. Используя формулу (8.13) и график, описанный в п. 8.5.6, вычисляют момент инерции гироскопа.

Угловую скорость вращения гироскопа ω измеряют непосредственно и тогда, когда измерение момента инерции возможно, и сравнивают результаты прямых и косвенных измерений.

8.6. Дополнительные задания

8.6.1. До практикума

А. Дать определение момента силы, а также момента импульса материальной точки и твердого тела относительно точки и оси.

Б. Как для данной опытной установки определить направление векторов момента импульса и момента суммарной внешней силы, вычисленных относительно точки крепления гироскопа?

В. Объяснить с помощью формулы (8.1), почему даже резкий сильный удар по стержню, осуществляющему ось вращения

гироскопа (рис. 8.2), не изменяет заметно ориентации оси.

Г. Определить центр масс механической системы, представить формулу, определяющую координату x_c системы через координаты x_1, x_2, \dots центров масс ее частей.

Д. Почему нельзя в качестве рабочей использовать формулу (8.9) вместо (8.13)?

Е. Представить формулу момента инерции однородного цилиндра с объяснением обозначений.

Ж. Представить форму таблицы для оформления измеренных и вычисленных величин $\Delta x, T, \Omega$.

8.6.2. После практикума

З. Поместить после выключения тока, когда скорость вращения гироскопа уже значительно уменьшилась, на стержень гироскопа дополнительный груз. Сделать это несколько раз при все уменьшающейся скорости вращения. Чем отличается движение гироскопа от его движения с большой скоростью вращения? Объяснить явление.

8.7. Литература

1. Таммет Н. Füüsika praktikum: Metroloogia.- Tln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воолайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТТУ, 1987. - 60 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1974. - I. - § 44.
4. Кортнев А.В. и др. Практикум по физике. - М.: Высшая школа, 1969. - Раб. № 4.
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Механика. - М.: Наука, 1979. - С. 263-280.

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА ЧЕРЕЗ МОДУЛЬ УПРУГОСТИ И МОДУЛЬ СДВИГА

9.1. Задание

Определение коэффициента Пуассона через модуль упругости и модуль сдвига.

9.2. Принцип и теория работы

Все реальные тела деформируемы, причем под деформацией понимают смещение частиц тела относительно друг друга или изменение среднего расстояния между ними. Простейшими деформациями являются деформация растяжения (а также деформация сжатия) и деформация сдвига. Все более сложные деформации сводятся к этим двум простейшим случаям.

Деформация растяжения (сжатия) возникает в теле под действием силы, перпендикулярной поверхности ее приложения. Деформацию растяжения (сжатия) можно характеризовать относительным удлинением (укорочением). Если начальная длина тела была ℓ и при деформации длина изменилась на $\Delta\ell$, то относительное удлинение (укорочение) выразится как

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}. \quad (9.1)$$

Эту деформацию сопровождает уменьшение (увеличение) площади поперечного сечения тела. Если на вертикальную резиновую трубку надеть плотно прилегающее к ней металлическое кольцо, а затем трубку растянуть, то диаметр трубки уменьшится и кольцо с нее соскользнет.

Изменение размеров поперечного сечения при деформации растяжения (сжатия) можно характеризовать относительным поперечным сжатием (растяжением)

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d}, \quad (9.2)$$

где d — размер тела в направлении, перпендикулярном направлению действия деформирующей силы (в вышеприведенном примере диаметр трубки), а Δd — изменение этого размера при деформации.

Отношение

$$\mu = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} \quad (9.3)$$

называется коэффициентом Пуассона (см. дополнительное задание А). Коэффициент Пуассона не зависит от размеров тела и одинаков для всех тел, изготовленных из одного и того же материала. Коэффициент этот характеризует упругие свойства веществ.

В растянутом (сжатом) теле возникают внутренние силы, перпендикулярные плоскости поперечного сечения и распределенные равномерно по этому сечению. Сумма этих сил на единицу площади поперечного сечения дает нормальное напряжение σ . Это напряжение прямо пропорционально относительному удлинению (закон Гука):

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (9.4)$$

Постоянная E называется модулем упругости вещества или модулем Юнга (Янга).

Деформация сдвига возникает в теле под действием сил параллельных плоскости их приложения. Прямолинейные отрезки, соединяющие любые частицы твердого тела, непараллельные силе, изменяют свое направление, оставаясь прямыми. Угол отклонения θ прямой, перпендикулярной силе, называется углом сдвига (рис. 9.1). Относительное смещение (сдвиг) точек тела равно тангенсу угла сдвига, который при малых деформациях можно заменить самим углом:

$$\frac{CC'}{CA} = \frac{DD'}{DB} = \tan \theta \approx \theta. \quad (9.5)$$

Внутренние силы в теле теперь параллельны плоскости приложения силы, тангенциальное напряжение τ одинаково по всему объему тела. Закон Гука относительно деформации сдвига записывается следующим образом:

$$\tau = G \theta. \quad (9.6)$$

Постоянная G называется модулем сдвига вещества.

Величины E и G , а также μ , однозначно определенные внутренним строением вещества, характеризуют упругие свойства вещества. Эти три величины связаны между собой соотношением [4, § 78]:

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1. \quad (9.7)$$

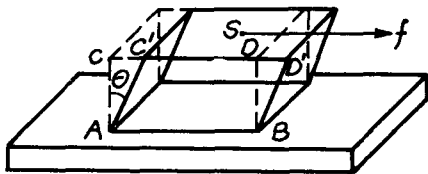


Рис. 9.1. Деформация сдвига прямоугольного параллелепипеда.

Задачей настоящей работы является вычисление коэффициента Пуассона материала через предварительно определенные значения модуля упругости и модуля сдвига. Дальнейшее представляет собой описание методов определения этих двух величин. И, конечно же, надо, чтобы как при определении модуля упругости, так и при определении модуля сдвига образцы были из материала одной и той же марки.

9.1. Определение модуля упругости из изгиба

9.1.1. Задание

Определение из деформации изгиба модуля упругости материала стержня, опирающегося концами на две стойки.

9.1.2. Принадлежности

Стержень из исследуемого материала, стенд для определения модуля упругости, прибор для измерения стрелы прогиба (измерительный микроскоп или катетометр), грузы, металлическая линейка или измерительная лента, штангенциркуль, микрометр.

9.1.3. Принцип и теория работы

Если прикрепить упругий стержень одним концом к стене, а к другому его концу подвесить груз, возникает деформация изгиба. Легко понять, что при такой деформации верхние слои стержня растягиваются, нижние сжимаются. Между этими слоями находится нейтральный слой, длина которого не изменяется — этот слой только искривляется.

Смещение свободного конца стержня λ называется стрелой прогиба. Длина стрелы прогиба тем больше, чем больше подвешенный груз. Стрела прогиба зависит еще от формы стержня, его размеров и модуля упругости материала стержня. Для вычисления стрелы прогиба рассмотрим стержень длиной L с прямоугольным поперечным сечением, шириной a и высотой b .

Пусть рассматриваемое поперечное сечение находится на расстоянии x от свободного конца стержня. На рис. 9.2 изображен элемент стержня длиной dx , опирающийся на это сечение. На рисунке: I — положение этого поперечного сечения до изгиба, II — положение этого же сечения относительно соседнего сечения III в условиях изгиба. В процессе изгиба плоскость сечения I переходит в положение II в результате поворота около горизонтальной оси, проходящей через нейтральный слой.

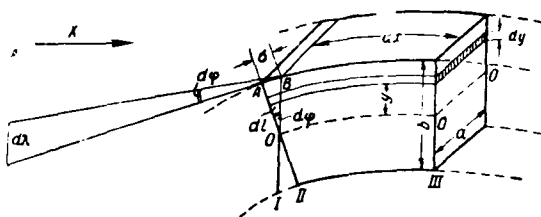


Рис. 9.2. Элемент изогнутого стержня.

Изгиб элемента стержня, изображенного на рисунке, характеризуется углом $d\varphi$ между положениями I и II. Нетрудно увидеть, что

$$d\varphi = \frac{\delta}{\frac{b}{2}} = \frac{2\delta}{b}.$$

Найдем смещение свободного конца стержня, т.е. стрелу прогиба $d\lambda$ в предположении, что деформирован только элемент стержня, изображенный на рис. 9.2, остальная часть стержня прямая. Для этого восстановим из точек A и B перпендикуляры к сечениям II и I и продолжим их до свободного конца стержня. Длина этих перпендикуляров равна χ . Ясно, что угол между перпендикулярами будет тоже $d\varphi$. Получим

$$d\lambda = \chi d\varphi = \frac{2\delta\chi}{b} \quad (9.8)$$

С целью нахождения стрелы прогиба стержня, изогнутого по всей его длине, следует проинтегрировать выражение (9.8). Для этого надо выразить еще δ . Найдем удлинение $d\epsilon$ слоя стержня, находящегося на произвольно выбранном расстоянии y от нейтрального слоя, толщина которого dy . Из рисунка (9.2) видно, что

$$\frac{d\ell}{\delta} = \frac{y}{\frac{b}{2}},$$

откуда

$$d\ell = \frac{2\delta y}{b}.$$

Такое удлинение должна вызвать сила dF , которую по закону Гука можно выразить следующим образом:

$$dF = \frac{E dS d\ell}{dx}.$$

В последнем выражении E — модуль упругости материала стержня, dS — площадь поперечного сечения растянутого слоя. Подставив в это выражение $d\ell$ и сделав замену $dS = a dy$ (см. рис. 9.2), получим

$$dF = \frac{2Ea\delta y}{b dx} dy.$$

Для вычисления вращающего момента, действующего на все поперечное сечение стержня, надо вычислить моменты сил dF , действующих на все элементы поперечного сечения, и суммировать их.

Элементарный вращающий момент

$$dM = y dF = \frac{2Ea\delta}{b dx} y^2 dy.$$

Суммарный момент упругих сил

$$M = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{2Ea\delta}{b dx} y^2 dy = \frac{Ea\delta b^2}{6 dx}.$$

Так как в условиях равновесия момент упругих сил уравновешен моментом внешних сил, то

$$M = \frac{Ea\delta b^2}{6 dx} = P\chi, \quad (9.9)$$

где P — нагрузка на свободном конце стержня, χ — рассто-

ание точки приложения нагрузки P от рассматриваемого сечения.

Сделав в формуле (9.8) замену δ из (9.9), получим

$$d\lambda = \frac{2\delta x}{b} = \frac{12Px^2}{Eab^3} dx. \quad (9.10)$$

Длина всей стрелы прогиба

$$\lambda = \int_0^L \frac{12P}{Eab^3} x^2 dx = \frac{4PL^3}{Eab^3}. \quad (9.11)$$

Такова длина стрелы прогиба стержня, один конец которого закреплен, а на другом висит груз. Если оба конца стержня опираются на жесткие стойки, а груз подвешен к его середине, то стрела прогиба может быть вычислена по той же формуле (9.11), только вместо P надо в формулу подставить $\frac{P}{2}$ и интегрировать в пределах от 0 до $\frac{L}{2}$. Действительно, в таком случае реакции обеих стоек на концы стержня будут $\frac{P}{2}$, тогда как середина его горизонтальна. Стержень, точки опоры которого находятся в обоих его концах, ведет себя так, как если бы он был закреплен в середине, а на расстоянии $\frac{L}{2}$ от средней его точки действовали бы силы $\frac{P}{2}$, направленные вверх. Следовательно, в таком случае длина стрелы прогиба

$$\lambda = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{12\frac{P}{2}x^2}{Eab^3} dx = \frac{PL^3}{4Eab^3}, \quad (9.12)$$

откуда

$$E = \frac{PL^3}{4ab^3\lambda}. \quad (9.13)$$

9.1.4. Описание установки

Экспериментальная установка предназначена для измерения стрелы прогиба стержня, опирающегося на стойки обоими концами и нагруженного в его середине. Основными частями установки являются две стальные горизонтальные призмы, установленные параллельно друг другу ребрами кверху — на них кладется исследуемый стержень. Расстояние между верхними ребрами призм определяет длину стержня L . Для подвешивания грузов имеется специальное стремя, которое надевается на стержень и своей призмой опирается на дно желоба в стальной пластинке, которую кладут на стержень в его середине. К этому стемени прикреплен штифт, на вершину которого при измерении стрелы прогиба наводится измерительный микроскоп или катетометр.

9.1.5. Ход работы

9.1.5.1. Измеряют линейные размеры стержня, входящие в формулу (9.13). Для измерения ширины a и высоты b стержня пользуются штангенциркулем и микрометром. Как положить стержень на призмы, т.е. $a > b$ или наоборот, а также каким измерительным прибором пользоваться при измерении величин a и b , судят по решению дополнительного задания В. Обе величины следует измерить по меньшей мере пять раз в разных местах по длине стержня. Разброс результатов с точки зрения конечного результата считать случайной погрешностью измерения.

Результаты измерения величин a и b и статистической обработки их оформить в виде таблицы.

Расстояние L между призмами измеряют с помощью металлической линейки или измерительной ленты.

9.5.1.2. Стержень с надетым на него стремением для подвешивания грузов кладут на призмы перпендикулярно к их ребрам (см. деления на призмах!). Подкладывают под призму стремени стальную пластину на равных расстояниях от опорных призм. Наводят измерительный микроскоп или катетометр на вершину штифта, прикрепленного к стремени. При пользовании измерительным микроскопом рекомендуется отрегулировать его так,

чтобы изображение штифта получилось в начале окулярной шкалы. Кладут на подставку грузы, измеряя соответствующие им стрелы прогиба, вначале в ходе увеличения, затем уменьшения нагрузки. О пользовании измерительным микроскопом или катетометром можно прочитать либо в заводских инструкциях к этим приборам, либо в сборнике [3, п. 5 и 6]. При надобности следует определить цену деления окулярной шкалы измерительного микроскопа (для микроскопа МИР-I цена деления в зависимости от длины тубуса дана в заводской инструкции, а также в сборнике [3, п. 5]; за погрешность цены деления принять половину единицы последнего десятичного знака).

Данные измерений P_i и λ_i представляют в виде таблицы. Номинальная масса гири 200 г. Предельной погрешностью массы гири следует считать максимальное отклонение масс гири от номинальной (см. дополнительное задание Г).

9.1.5.3. Результаты измерений с крестами погрешностей наносят на плоскость λ, P . Из формулы (9.12) видно, что графиком зависимости $\lambda = \lambda(P)$ должна быть прямая, следовательно, полученные кресты должны лежать так, чтобы через них было возможно провести прямую. Входящее в формулу (9.13) отношение P/λ определяют как крутизну этой прямой, решив задачу линейной регрессии графически или методом наименьших квадратов [1, п. 39.1, 39.2, 39.3; 2, п. 9].

Вычисляют модуль упругости и его предельную погрешность.

Число исследуемых стержней задает руководитель практикума. Среди них обязательно должен быть стальной стержень.

9.2. Определение модуля сдвига из крутильных колебаний

9.2.1. Задание

Определение модуля сдвига материала проволоки через исследование колебаний крутильного маятника.

9.2.2. Принадлежности

Крутильный маятник (исследуемая проволока, на которой подвешен горизонтальный стержень, с дополнительными грузами), микрометр, штангенциркуль, секундомер, технические

весы, разновес.

9.2.3. Теория метода и описание установки

В настоящей работе модуль сдвига определяется из исследований деформации кручения. Деформация кручения сводится по существу к деформации сдвига, но возникает она только под действием пары сил. Рассмотрим проволоку длиной L , с радиусом поперечного сечения R , верхний конец которой жестко закреплен (см. рис. 9.3). К нижнему ее концу приложена пара сил F , момент которой M , а ось совпадает с осью проволоки.

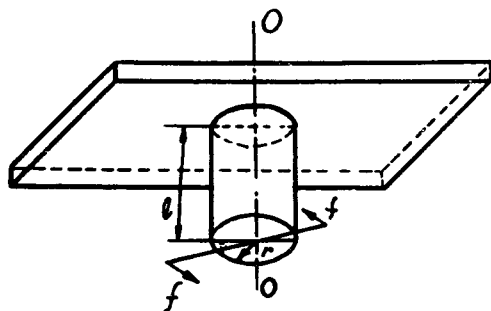


Рис. 9.3. Деформация кручения проволоки.

Разные поперечные сечения проволоки поворачиваются относительно верхнего (закрепленного) сечения на различные углы. Нижнее сечение поворачивается относительно верхнего на угол φ , называемый углом закручивания. Согласно закону Гука момент вращающей силы прямо пропорционален углу закручивания:

$$M = D\varphi, \quad (9.14)$$

где D — дирекционный момент.

Дирекционный момент и модуль сдвига материала свя-

заны соотношением [4, § 79]:

$$D = G \frac{\pi R^4}{2L}. \quad (9.15)$$

Если подвесить на проволоке некоторое тело и повернуть его на угол φ_0 вокруг оси проволоки, а затем отпустить, то оно начнет колебаться вокруг этой оси около положения равновесия. Такие колебания называют крутильными, а систему — крутильным маятником. Пренебрегая силами трения, можно на основе скалярного уравнения моментов и закона Гука записать дифференциальное уравнение движения, взяв за обобщенную координату угол поворота маятника относительно положения равновесия (угол закручивания) φ :

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi, \quad (9.16)$$

где J — момент инерции маятника относительно оси вращения (оси проволоки). Преобразуя уравнение (9.16), получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0 \quad (9.17)$$

Это уравнение гармонических колебаний с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (9.18)$$

Из формул (9.18) и (9.15) можно выразить модуль сдвига

$$G = \frac{2LD}{\pi R^4} = \frac{8\pi L J}{R^4 T^2}. \quad (9.19)$$

В последнем выражении остается неопределенным момент инерции J . Для исключения этой величины используется крутильный маятник специальной конструкции (рис. 9.4). К кронштейну прикреплена проволока из исследуемого материала OO' , на нижнем конце которой крепится горизонтальный стержень PP_1 с грузами одинаковой массы m . Грузы можно перемещать по стержню PP_1 ; чтобы стержень оставался горизонтальным, надо, чтобы грузы располагались симметрично отно-

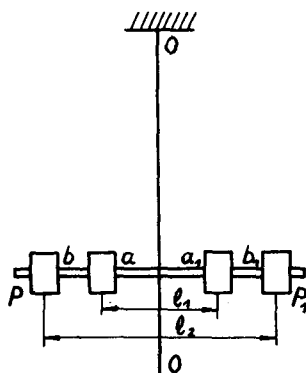


Рис. 9.4. Крутильный маятник.

сительно оси вращения. Обозначим через \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 моменты инерции крутильного маятника при положении грузов aa_1 и bb_1 соответственно, а через \mathcal{I}_0 — момент инерции маятника, при условии, что центры тяжести обоих грузов находятся на оси вращения. В таком случае по теореме Штейнера:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{1}{2} m l_1^2 + \mathcal{I}_0, \\ \mathcal{I}_2 &= \frac{1}{2} m l_2^2 + \mathcal{I}_0. \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

Если соответствующие периоды обозначить через T_1 и T_2 , то

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{I}_1}{D}}, \\ T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{I}_2}{D}}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда вытекает связь между периодами колебаний и моментами инерции:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_2},$$

откуда

$$T_2 = \frac{T_2^2}{T_1^2} T_1. \quad (9.21)$$

Из системы уравнений (9.20) получается

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m (\ell_2^2 - \ell_1^2).$$

Отсюда, с учетом (9.21), вытекает

$$T_1 = \frac{m(\ell_2^2 - \ell_1^2) T_1^2}{2(T_2^2 - T_1^2)}. \quad (9.22)$$

Из формул (9.19) и (9.22) с заменой радиуса проволоки R через ее диаметр d получается

$$\zeta = \frac{64\pi L m (\ell_2^2 - \ell_1^2)}{d^4 (T_2^2 - T_1^2)}. \quad (9.23)$$

Все величины, входящие в формулу (9.23), определяются из опыта прямым измерением.

Для возбуждения колебаний служит специальное приспособление, с помощью которого поворачивают верхний конец проволоки на некоторый угол (приспособление это позволяет избежать возникновения боковых колебаний).

Длина проволоки L задается, как постоянная установки.

9.2.4. Ход работы

9.2.4.1. На основании решения дополнительного задания Ж выясняют, каким из приборов, микрометром или штангенциркулем, пользоваться для измерения диаметра проволоки. Для учета неравномерности толщины проволоки следует диаметр ее измерить по меньшей мере в 5–6 разных местах по ее длине, а интервальную оценку вычислить по тесту Стьюдента или тесту знаков.

9.2.4.2. Оба передвижных груза взвешивают с такой точностью, чтобы можно было относительную предельную погрешность массы m рядом с относительной предельной погреш-

ностью сомножителя R^4 не учитывать.

9.2.4.3. Выбрав положения грузов согласно решению дополнительного задания Ж, измеряют при одном из этих положений время 10 полных колебаний по меньшей мере три раза. Если случайные отклонения от среднего не окажутся значительно меньшими допустимой погрешности секундомера, увеличивают число измерений до 5–6. Такое же число измерений производят и при другом положении грузов. Вычисляют интервальную оценку периодов колебаний T_1 и T_2 .

Грузы следует располагать по возможности точно на равных расстояниях от оси вращения, пользуясь для этого делениями, нанесенными на горизонтальный стержень маятника. Расстояние между центрами масс цилиндрических грузов l_1 (l_2) следует измерить с максимально возможной точностью. Как это сделать, если нет отметок, указывающих середину цилиндра?

9.2.4.4. Вычисляют модуль сдвига G и его предельную погрешность.

9.2.4.5. Пользуясь значением G , найденным здесь, и значением E , найденным в первой части работы для стали, вычисляют коэффициент Пуассона μ для стали и его предельную погрешность.

9.3. Дополнительные задания

9.3.1. До практикума

А. Почему в формуле (9.3) стоит знак минус?

Б. Каков возможный промежуток значений коэффициента Пуассона?

В. Все стержни, предназначенные для опытов по определению модуля упругости, имеют прямоугольное поперечное сечение, т.е. $a \neq b$. Исследуя формулу (9.12), выяснить, который из размеров в интересах точности принять за высоту. Учесть, что при измерении стрелы прогиба абсолютная погрешность не зависит от длины самой стрелы, а на точности модуля упругости сказывается относительная погрешность.

После того как предыдущий вопрос решен, остается выяснить, чем следует пользоваться для измерения обеих ве-

личин, штангенциркулем или микрометром. Точность микрометра приблизительно в 10 раз больше, но пользоваться им менее удобно. Для которого из размеров требуется большая точность?

Г. Представить простейший метод определения предельной погрешности массы грузов, используемых при определении модуля упругости. Предельной погрешностью считается максимальное отклонение массы одной гири от номинального ее значения. Пользоваться можно рычажными весами и комплектом разновесок.

Д. Выпишите векторное и скалярное уравнения моментов с указанием обозначений.

Е. Является ли уравнение движения (9.16) точным или оно приближено? Можно ли начальную амплитуду крутильного маятника φ задавать произвольно или следует ограничивать ее малыми ее значениями? Насколько малыми?

Ж. Вывести, исходя из формулы (9.23), формулу для вычисления относительной предельной погрешности модуля сдвига. Исследуя эту формулу, установить, при измерении каких величин, входящих в формулу (9.23), следует обратить особое внимание на точность измерений.

На основе рассмотрения формулы предельной погрешности решить, как следует выбрать положение грузов a, a_1 и b, b_1 , чтобы гарантировать при определении модуля упругости максимально возможную точность.

9.3.2. После практикума

3. При измерении промежутков времени с помощью механического или электронного секундомера предельная погрешность результата всегда чисто случайна. При измерениях электрическим секундомером, питаемым от сети, появляется дополнительно систематическая погрешность, обусловленная неточностью частоты сети, которую можно существенно уменьшить, приняв в расчет поправку на частоту. Предполагая, что погрешность Δt при измерении промежутка времени случайна и не зависит от длины измеряемого промежутка, используя оценку погрешности, полученную при выполнении п. 9.2.4.3 настоящего руководства, определить, продолжи-

тельность скольких полных колебаний следует измерять при определении периодов колебаний T_1 и T_2 , если хотеть ограничиться однократным измерением, причем погрешность сомножителя ($T_2^2 - T_1^2$) была бы пренебрежимо малой по сравнению с погрешностью сомножителя R^4 . Если при измерениях пользовались электрическим секундомером, питаемым от сети, решить еще дополнительно, с какой точностью следует измерять частоту сети, чтобы систематической погрешностью при измерении времени можно было пренебречь.

9.4. Литература

1. Tammet H. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Tln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воолайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТТУ, 1987. - 60 с.
3. Руководства к практикуму по общим физическим измерениям / Сост. Э. Тамм. - Тарту: ТТУ, 1987. - 60 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Механика. - М.: Наука, 1979. - С. 384-407.

10. ИЗУЧЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ РАСТЯЖЕНИЯ

10.1. Задание

Построение диаграммы растяжения, определение модуля упругости и критических напряжений.

10.2. Принадлежности

Исследуемая проволока, стенд для ее растяжения, комплект гирь, табурет, обтянутый тканью, измерительная лента, микрометр, штангенглубиномер, нитрокраска, щипцы-кусачки, плоскогубцы.

10.3. Введение

Сопrotивляемость вещества растяжению характеризуется полностью диаграммой растяжения, т.е. функцией $\sigma = \sigma(\epsilon)$, выражающей зависимость нормального напряжения σ , возникающего в веществе под действием внешних сил, от относительного удлинения ϵ (обычно эта зависимость представляется в виде графика).

Простейший способ исследования деформации растяжения описан в руководстве [3, зад. 8]. К вертикально висящей проволоке из исследуемого материала подвешивают грузы известной массы и измеряют абсолютное удлинение проволоки. Однако таким методом трудно получить диаграмму растяжения, так как в области текучести невозможно достижение равновесия. Изучение последнего ниспадающего участка диаграммы растяжения и вовсе невозможно (почему?).

В установках, предназначенных для определения диаграммы растяжения, поступают противоположно ранее упомянутому методу: в качестве аргумента задают деформацию и регистрируют возникающее при этом напряжение. Такой способ является принципиально наилучшим, но он требует для получения удовлетворительной точности сложной аппаратуры.

Нижеприводимый метод более похож на первый способ, но он позволяет достигнуть равновесия в области текучести и даже в медленно ниспадающей части диаграммы растяжения. Преимуществом метода является еще и простота установки, а сам опыт поучителен как демонстрация законов статики.

10.4. Теория метода и описание установки

Положение исследуемой проволоки горизонтально. Проволока закреплена жестко с обоих концов, а к ее середине подвешивают груз массой m . Это позволяет:

- 1) создавать растягивающую силу, значительно превышающую вес груза $P = mg$,
- 2) достигнуть равновесия в области текучести, так как при растяжении растягивающая сила уменьшается без того, чтобы нужно было изменять нагрузку.

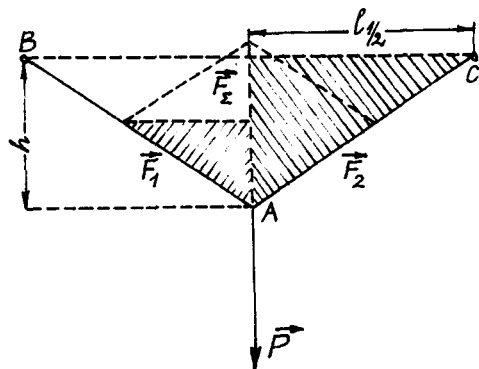


Рис. 10.1. Нагруженная проволока в условиях равновесия.

На рис. 10.1 точки B и C - места закрепления концов проволоки. В точке A приложены три уравновешивающие друг друга силы: сила тяжести груза $\vec{P} = m\vec{g}$ и две силы натяжения проволоки \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . В силу симметрии $F_1 = F_2 = F$. Модуль результирующей силы натяжения (\vec{F}_z) $F_z = P$.

В силу подобия заштрихованных треугольников имеет место пропорция

$$\frac{\frac{1}{2} F_z}{F} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \ell_{1/2}^2}}, \quad (10.1)$$

где h — провес проволоки, а $\ell_{1/2}$ — половина расстояния между точками крепления. Отсюда

$$F = \frac{mg \sqrt{h^2 + \ell_{1/2}^2}}{2h}. \quad (10.2)$$

По силе натяжения F можно вычислить нормальное напряжение в проволоке (см. дополнительное задание Б). Для нахождения действительного значения нормального напряжения следовало бы разделить силу F на действительное значение площади поперечного сечения S , которое в силу растяжения проволоки становится несколько меньше первоначального его значения. В теории сопротивления материалов, однако, почти никогда не пользуются действительными значениями нормального напряжения, а всегда применяют условные значения, которые определяются как отношение силы натяжения F и начального значения площади поперечного сечения проволоки (в ненагруженном состоянии) $S_0 = \frac{1}{4} \pi d_0^2$:

$$\sigma = \frac{F}{S_0} = \frac{2mg \sqrt{1 + \left(\frac{\ell_{1/2}}{h}\right)^2}}{\pi d_0^2}. \quad (10.3)$$

Надо вычислить еще относительное удлинение проволоки $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$. Длина деформированной проволоки

$$\ell = 2 \sqrt{h^2 + \ell_{1/2}^2}. \quad (10.4)$$

Удлинение проволоки можно выписать в виде:

$$\Delta \ell = 2 \sqrt{h^2 + \ell_{1/2}^2} - \ell_0, \quad (10.5)$$

где ℓ_0 — начальное значение длины проволоки, но для практического пользования такое выражение непригодно (см. дополнительное задание В). Поэтому здесь при построении

диаграммы растяжения пользуются приемом, который кажется несколько искусственным. На координатных осях откладывают шкалу значений σ и ℓ (см. рис. 10.2). На оси σ начальная точка является нулевой, ось ℓ делят так, чтобы фигурирующие на ней значения ℓ_{min} и ℓ_{max} были расположены так, как показано на рис. 10.2. Шкалу ℓ наносят сверху оси абсцисс, а пространство под осью оставляют свободным. На подготовленную таким образом координатную плоскость наносят опытные точки и проводят через них кривую. Согласно закону Гука начальный участок этой кривой должен быть прямым, что позволит с помощью линейки продолжить график до оси ℓ (на рис. пунктир). Так узнают неизвестное до сих пор значение ℓ_0 .

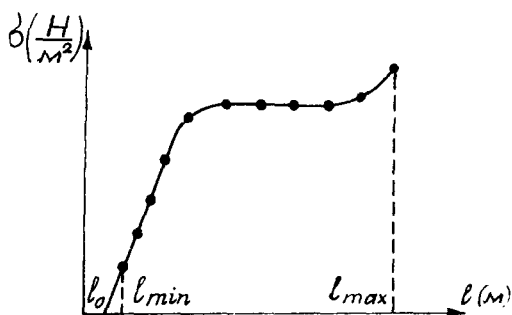


Рис. 10.2. Диаграмма растяжения.

Теперь можно вычислить значения $\Delta \ell$ и ε и построить диаграмму растяжения в обычном виде (оси ε и σ). Последнее действие, однако, можно рационализировать. Так как ε зависит от ℓ линейно, то на оси абсцисс надо отложить только значения ε , отвечающие значениям ℓ . Для этого и было оставлено свободное место под осью. Прежде всего вычисляют $\varepsilon(\ell_{max})$ и выбирают на оси ε подходящее значение деления (таким образом, чтобы ось абсцисс разделилась приблизительно на десять частей). Теперь вычисляют значения ℓ , отвечающие точкам деления оси ε . Так как $\varepsilon = (\ell - \ell_0)/\ell_0$, то

$$\ell = (1 + \varepsilon) \ell_0. \quad (10.6)$$

Нанесенные таким образом на нижнюю сторону оси ϵ деления не совпадают с квадратной шкалой на бумаге. Поэтому от каждого штриха между делениями на оси ϵ проводят цветную вертикальную прямую. Прямую $\epsilon = 0$ проводят такой же линией, как координатные оси: эта прямая и есть настоящая ось ординат диаграммы растяжения.

По диаграмме растяжения можно определить предел пропорциональности, предел текучести, предел прочности и модуль упругости. Модулем упругости является крутизна прямолинейного участка диаграммы растяжения:

$$E = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \epsilon}. \quad (10.7)$$

Экспериментальная установка представляет собой шину из профильной стали, в обоих концах которой имеются зажимы для крепления проволоки. Посередине между зажимами расположена изолированная от шины плоская пластина для установки штангенглубиномера. Измерительный стержень глубиномера пропускается через соответствующее отверстие или щель. При контакте стержня глубиномера с проволокой загорается сигнальная лампа.

Номинальные массы гирь, используемых в качестве нагрузок, даны в паспорте комплекта гирь, вместе с допустимыми погрешностями.

10.5. Ход работы

10.5.1. Концы проволоки нельзя зажимать слишком сильно, иначе деформированная в зажиме проволока может оборваться уже в начале опыта при небольших нагрузках. Но проволока не должна и скользить в зажиме. Необходимо найти минимальное давление зажима, при котором проволока в нем скользить не будет. Для этого проделывают предварительный опыт с небольшим кусочком проволоки. Помещают середину кусочка проволоки в паз одного из зажимов и легонько зажимают. Проволочку тянут за один ее конец с помощью плоскогубцев. Наблюдая проволочку с другой стороны зажима, легко увидеть ее скольжение в зажиме. Увеличивают постепенно давление до тех пор, пока проволочка не перестанет сколь-

зять (до обрыва). Запоминают положение рукоятки зажима. Опыт повторяют с другим зажимом.

10.5.2. Определяют постоянную установки h_0 — показание штангенглубиномера при натянутой прямой проволоке. Для этого отрезают подходящий по длине кусок проволоки, закрепляют один конец в зажиме, другой конец пропускают через другой зажим, натягивают проволоку с помощью плоскогубцев и зажимают другой ее конец. Измеряют h_0 . При проведении основного опыта на проволоку в середине ее навешивают проволочный крючок для подвешивания грузов; обозначим диаметр проволоки крючка через d' . Провес нагруженной проволоки измеряют над крючком. Обозначив показание глубиномера через h_z , по величинам h_z , h_0 и d' определяют потом провес h (см. дополнительное задание Д).

10.5.3. Для основного опыта берут новую проволоку. Измеряют ее диаметр с помощью микрометра по меньшей мере в десяти разных местах, вычисляют среднее значение диаметра вместе с оценкой погрешности. Закрепляют проволоку в зажимах, так чтобы она слегка провисала (см. дополнительное задание В). Закручивая рукоятки зажимов, следует руководствоваться предписаниями предварительного опыта. Измеряют расстояние между точками зажатия проволоки $2l_{1/2}$. Чтобы убедиться в том, что проволока в течение опыта не скользила в зажимах, делают на проволоке в местах зажима метки нитроокраской. Взвешивают крючок на технических весах, навешивают его на проволоку точно в ее середине, ставят под крючком обтянутую тканью табуретку или поролоновый коврик, куда упадут подвешенные гири в конце опыта.

10.5.4. К крючку подвешивают грузы и измеряют значения h_z . Сам крючок считается первым грузом. Чтобы получить в пределах выполнения закона Гука по возможности большее число точек, следует в начале опыта подобрать ряд нагрузок настолько плотный, насколько это позволяет набор гирь. При нагрузках больше I и II желательно выбрать ряд по следующей системе:

- а) одна гиря,
- б) та же гиря + в четыре раза более легкая гиря,

- в) та же гирия + в два раза более легкая гирия,
 - г) в два раза более тяжелая гирия,
- и т.д. до обрыва проволоки.

В таблицу протокола вносят номера использованных гирь и k_z для каждой опытной точки, а также массы всех гирь (вместе с их предельными погрешностями), взятые из паспорта комплекта гирь.

10.5.5. Результаты обрабатывают на ЭВМ (ДВК-2, МЕГА САМАС) в диалоговом режиме. По результатам, выданным ЭВМ, строят график, описанный в п. 10.4 (диаграмму растяжения с двойной шкалой аргумента). На график наносят также кресты погрешностей и строят коридор погрешностей. Значения предельных погрешностей величин ℓ , ϵ и δ , выданные ЭВМ в большой таблице, вычислены на основе погрешностей непосредственно измеряемых величин и содержат в себе как систематическую погрешность, свойственную всем опытным точкам, так и случайные погрешности, изменяющиеся от точки к точке. По диаграмме растяжения определяют критические напряжения — предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности (см. дополнительное задание В).

10.5.6. Начальная длина проволоки ℓ_0 и модуль упругости ее материала E вычисляются по методу наименьших квадратов как постоянные регрессионной прямой. Погрешности этих величин, выданные ЭВМ, содержат только случайный компонент: оценку систематической погрешности производят графически. Для этого строят прямолинейный участок диаграммы растяжения по опытным точкам отдельно в осях ℓ , δ и ϵ , δ . Через эти точки проводят (на глаз) прямые, наилучшим образом приближающие эти точки (графическая регрессионная прямая). По постоянным, выданным ЭВМ, строят полученные методом наименьших квадратов регрессионные прямые. Наносят на графики оценки систематических погрешностей (см. дополнительное задание И), определяют предельную систематическую погрешность ℓ_0 , вычисляют то же самое для E . Находят объединенную оценку систематических и случайных погрешностей.

На график ℓ , δ наносят также расстояние между точ-

ками крепления проволоки $2 \ell_{1/2}$.

10.6. Описание алгоритма обработки данных

Вся обработка данных проводится на ЭВМ в диалоговом режиме. По вопросам ЭВМ вводят свою фамилию, постоянные установки (расстояние между точками крепления ℓ (мм), начальное показание глубиномера h_0 (мм), диаметр проволоки крючка d' (мм), массу крючка m_k (г), массы всех гирь комплекта m_i (г) вместе с их предельными погрешностями), затем результаты измерений – показания глубиномера $h_{\Sigma j}$ (мм) и номера использованных гирь N_{ej} для каждого опыта. Номер крючка 0, он вводится всегда последним и является, таким образом, признаком конца ряда гирь. ЭВМ выдает на экран дисплея (а при желании и на бумагу) значения длины проволоки ℓ_j и нормального напряжения σ_j . Первые опытные точки наносят быстро на миллиметровую бумагу в осях ℓ , σ до тех пор, пока не будет заметно явное отклонение от прямой, сообщают ЭВМ предполагаемое число точек прямолинейного участка (желательно дать сначала несколько больше точек). ЭВМ выдает постоянные K и σ_0 регрессионной прямой $\sigma = K\ell + \sigma_0$ и отклонения опытных точек от этой прямой. По профилю отклонений судят, нужно ли изменить (уменьшить) число точек или нет. Через окончательно отобранные точки ЭВМ проводит регрессионную прямую, вычисляет оценку начальной длины проволоки: $\ell_0 = -\frac{\sigma_0}{K}$.

Далее вычисляют относительные удлинения ε . Так как на прямолинейном участке диаграммы растяжения $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ при образовании коридора погрешностей решающее значение имеют случайные погрешности ε , то в качестве аргумента регрессионной кривой выбирают σ и находят модуль упругости E как обратное значение крутизны прямой $E = K/\varepsilon$.

Далее печатается полная таблица данных, где для проверки правильности ввода приводят и введенные данные. Таблица содержит величины m , h_{Σ} , h , ℓ , σ , ε ; последние три с оценкой их предельной погрешности (сумма случайных и систематических погрешностей). Отдельно печатаются еще оценки систематических погрешностей величин ℓ , σ и ε .

Наконец вводятся постоянные обеих регрессионных прямых k , b_0 и k_1 и обратное значение последней E вместе с их предельными погрешностями.

10.7. Дополнительные задания

10.7.1. До практикума

А. Вычертить диаграмму растяжения в общем виде [4]. Обозначить на ней точки, отвечающие критическим напряжениям.

Б. Следует ли рассматривать силу F как силу, приложенную только в точке A (рис. 10.1), или она имеет более широкий смысл? Является эта сила внешней по отношению к проволоке или внутренней силой вещества проволоки? Каков физический механизм возникновения этой силы?

В. Почему начальную длину проволоки l_0 нельзя считать равной расстоянию $2 l_{1/2}$ между точками крепления? Ведь тогда не нужно было бы проделывать длинную процедуру определения l_0 , описанную в конце п. 10.4!

Если проволоку натянуть перед ее закреплением в зажимах, то равенство $l_0 = 2 l_{1/2}$ кажется правомерным. Так ли это? Верна ли в п. 10.4 описанная методика и в этом случае? Если нет, то какие результаты в этом случае будут неверными, какие верными?

Г. Начертить карандашом на диаграмме растяжения, полученной в работе, предполагаемый ход этой кривой в случае предварительного натяжения проволоки.

Д. Вывести формулу для вычисления h по величинам h_{Σ} , h_0 и α' .

Е. Будут ли данные опыта достоверными, если проволока оборвется в месте зажима? Какие результаты будут в этом случае искажены?

Ж. Вывести методом линеаризации формулы для вычисления предельных погрешностей величин l , b и E [1, п. 38.4; 2, п. 7]. Каждый член в полученных выражениях будет содержать предельную погрешность одной непосредственно измеренной величины. Определить, какие члены дадут в сумме оценку систематической погрешности. Показать на кон-

кретном расчетном примере, какими членами по сравнению с другими можно пренебречь. Расчет этот следует сделать после практикума, т.е. тогда, когда будут получены соответствующие данные.

З. Систематическую погрешность начальной длины проволоки ℓ_0 находят графически (см. п. 10.5.6). ЭВМ, однако, выдает оценки систематической погрешности величины ε , тогда как ε вычисляется через ℓ_0 . Как это оказывается возможным, откуда берет программа нужные данные?

И. Что является более правильным: нанести кресты погрешностей на график (п. 10.5.6) к опытным точкам или к точкам регрессионной прямой, соответствующим измеренным значениям аргумента?

10.7.2. После практикума

К. Начертить схему опытной установки и показать на ней все действующие силы (включая реакции опор). Какие деформации возможны в профильной шине установки?

Л. Оценить изменение длины шины при максимальном значении приложенной нагрузки в нашем опыте. Модуль упругости стали принять равным $2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м². Для определения площади поперечного сечения измерить нужные величины. Силу натяжения проволоки считать приложенной равномерно по площади поперечного сечения шины в месте крепления проволоки.

Оценить методическую погрешность при определении длины проволоки ℓ , происходящую от деформации шины. Сравнить ее с погрешностью измерения, определенной ранее.

10.8. Литература

1. Tammets H. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Tln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воодайд.Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТТУ, 1987. - 60 с.
3. Физический практикум: Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И. Ивероновой. - М.: Наука, 1967. - 352 с.
4. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. - С. 282-291.

II. ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

II.1. Задание

Ознакомление со свободными колебаниями вертикального пружинного маятника в условиях слабого и сильного затухания.

II.2. Принадлежности

Консоль с сантиметровой линейкой, прикрепленный на стене, комплект пружин и грузов, сосуд с водой, секундомер.

II.3. Теория работы и описание установки

Пружинный маятник представляет собой вертикальную цилиндрическую спиральную пружину, верхний конец которой закреплён жестко, а к нижнему подвешен груз. Если подвесить к пружине груз массы m , поддерживая его снизу, а затем дать ему очень медленно опуститься, то система останется в равновесии, причем пружина растянута (нижний конец ее смещен) на $\Delta \ell_0$ ($\Delta \ell_0 = AA_1$ на рис. II.1). По закону Гука можно записать:

$$P = mg = k \Delta \ell_0. \quad (II.1)$$

Коэффициент пропорциональности k показывает силу, под действием которой пружина получает единичное удлинение. Его называют коэффициентом жесткости пружины.

Если теперь действием внешней силы вывести груз из положения равновесия по вертикали и затем освободить, то маятник начнет колебаться вертикально (см. дополнительное задание В). Пусть в некотором произвольном положении (A_2 на рис. II.1) удлинение пружины будет $\Delta \ell$, тогда суммарная сила, действующая на груз

$$F = k\Delta l - mg = k(\Delta l - \Delta l_0) = kx, \quad (\text{II.2})$$

где x — смещение груза из положения равновесия. Если пружинный маятник находится в воздухе, то силой сопротивления можно пренебречь и квазиупругая сила F является единственной действующей силой; легко убедиться, что эта сила всегда направлена к положению равновесия (A_1). На основании II закона Ньютона можно записать дифференциальное уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (\text{II.3})$$

Это уравнение гармонических колебаний — без учета сил сопротивления пружинный маятник колеблется гармонически, свободные колебания можно условно считать собственными колебаниями. Решением уравнения (II.3) является синусоидальная функция:

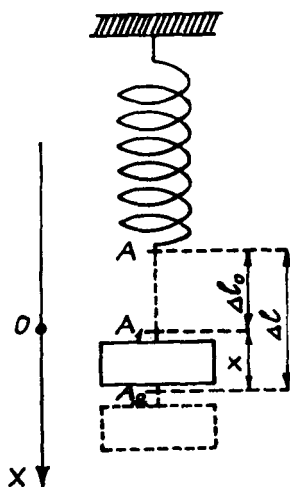
$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (\text{II.4})$$

Относительно символов A , ω_0 и φ_0 см. дополнительное задание Б. Период таких колебаний определяется массой груза и коэффициентом жесткости пружины:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{II.5})$$

Рис. II.1. Вертикальный пружинный маятник.

Если поместить пружинный маятник в среду более плотную, чем воздух, например, в некоторую жидкость, то уже нельзя пренебречь сопротивлением этой среды. Так как причиной сопротивления среды является ее вязкость, то сила сопротивления прямо пропорциональна скорости движения груза и дифференциальное уравнение движе-



ния примет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}, \quad (\text{II.6})$$

где h — коэффициент силы трения (в данном случае также коэффициент сопротивления среды). Коэффициент h зависит от коэффициента внутреннего трения жидкости, а также формы и размеров движущегося тела. Уравнение (II.6) является уравнением затухающих колебаний, его решение имеет следующий вид:

$$x = A_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1). \quad (\text{II.7})$$

Коэффициент затухания

$$\gamma = \frac{h}{2m}, \quad (\text{II.8})$$

круговая частота затухающих (свободных) колебаний

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (\text{II.9})$$

φ_1 — начальная фаза. Значение постоянной A_1 зависит от начальных условий (способа возбуждения колебаний) (см. дополнительное задание Г); произведение $A_1 e^{-\gamma t}$ можно условно назвать амплитудой в момент времени t (конечно, только в такие моменты времени, когда значение синусоидальной функции в формуле (II.7) равно 1; см. дополнительное задание Д).

Для описания затухания часто пользуются логарифмическим декрементом затухания Θ , который выражается через две последовательные амплитуды следующим образом:

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_1)} \quad (\text{II.10})$$

(см. дополнительное задание Е), $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ — период затухающих колебаний (опять-таки условное название — почему?).

Формула (II.10) мало пригодна для опытного определения величины Θ , ибо значения двух последовательных амплитуд очень близки и с этим связана большая погрешность (почему?). Часто пользуются следующим приемом: маятнику задают амплитуду A_1 , освобождают его без толчка, измеряют время $t = nT_1$, в течение которого амплитуда уменьшается до некоторого за-

данного значения $A(t')$. Так как $A(t') = A_1 e^{-\gamma t'}$, то

$$\ln \frac{A_1}{A(t')} = \ln \frac{1}{e^{-\gamma t'}} = \gamma n T_1.$$

В результате решения дополнительного задания Е получено $\Theta = \gamma T_1$, следовательно

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_1}{A(t')} = \frac{T_1}{t'} \ln \frac{A_1}{A(t')}. \quad (\text{II.II})$$

Целью настоящей работы является опытная проверка формулы периода гармонических колебаний (II.5) и измерение величин, характеризующих затухающие колебания.

В работе используются промежуточные звенья с острыми, которые помещают между пружиной и грузами; массы грузов и этих звеньев задаются как постоянные установки (написаны на них); допустимая погрешность не превышает 0,5 % от номинальной массы. На линейке сантиметровые деления нанесены с точностью до 1 мм относительно нулевого штриха.

II.4. Ход работы

II.4.1. Определяют коэффициенты жесткости пружин. С этой целью измеряют удлинение пружины $\Delta \ell_0$ под действием известного груза P , для каждой пружины с помощью по меньшей мере пяти различных грузов. Строят графики зависимости $P = P(\Delta \ell_0)$. Крутизну полученных прямых определяют графическим методом линейной регрессии [1, п. 39.1, 39.2; 2, п. 9]. Можно конечно пользоваться и методом наименьших квадратов [1, п. 30.10, 39.3, 39.4, 39.5; 2, п. 9; п. 03 настоящего сборника].

II.4.2. Прикрепляют верхний конец произвольно выбранной пружины к консоли. На нижний конец пружины надевают промежуточное проволочное звено, острие которого располагается между направляющими проволоками на линейке, подвешивают к пружине подходящий груз ($\Delta \ell > 10$ см). Приводят маятник в колебание, учитывая решение дополнительного задания А. Требования к креплению пружины и возбуждению колебаний учитываются и в дальнейшем. Измеряют время 5...10 колебаний по меньшей мере 10...15 раз (см. п. 01 настоящего сборника). При измерениях секундомером, питаемым от сети, сле-

дует учесть систематическую погрешность, обусловленную неточностью частоты сети (см. п. 01 настоящего сборника).

II.4.3. Определяют зависимость периода собственных колебаний пружинного маятника от массы груза. Для этого измеряют период колебаний пружинного маятника по меньшей мере с пятью разными грузами (для одной пружины). При определении периода учитывается сказанное в предыдущем пункте.

Наносят полученные точки с крестами погрешностей на плоскость m, T^2 (см. дополнительное задание Ж). Если окажется возможным провести прямую, проходящую через все кресты, то формула (II.5) отражает зависимость $T = T(m)$ в пределах точности опыта правильно (см. дополнительное задание И).

Определяют методом графической регрессии или методом наименьших квадратов крутизну прямой, вычисляют коэффициент жесткости K , сравнивают полученный результат с тем, что был получен статическим методом.

II.4.4. Выясняют зависимость периода собственных колебаний пружинного маятника от коэффициента жесткости пружины. Для этого определяют период колебаний пружинного маятника по меньшей мере для пяти различных пружин с одним и тем же грузом. По полученным результатам строят график в целесообразно выбранных координатах (см. дополнительное задание Ж), взяв значения K из п. II.4.1. На плоскость наносят точки с крестами погрешностей и если окажется возможным провести прямую, проходящую через все кресты, то формула (II.5) отражает зависимость $T = T(K)$ в пределах погрешности измерений правильно.

Определяют методом линейной регрессии или методом наименьших квадратов крутизну полученной прямой, вычисляют массу груза m и сравнивают ее с номинальным значением (см. дополнительное задание И).

II.4.5. Определяют логарифмический декремент затухания пружинного маятника и коэффициент сопротивления среды. Подвешивают к пружине груз и опускают его в сосуд с водой. Задают маятнику некоторую начальную амплитуду A_1 и измеряют период T_1 и время t' , в течение которого амплитуда уменьшается до некоторого значения $A(t')$. Здесь следует обе

величины измерить по меньшей мере 6 раз. Методом теста знаков определяют интервальные оценки величин T_1 и t' , вычисляя логарифмический декремент затухания маятника θ .

Опыт повторяют еще при двух, отличных от первой, начальных амплитудах. Выясняют, зависит ли затухание от начальной амплитуды. Заменяют груз на другой груз такой же массы, но другого диаметра, повторяют опыт. Делают заключение о зависимости затухания от размеров груза.

II.4.6. По требованию руководителя практикума решают дополнительные задания 3 и И.

II.5. Дополнительные задания

II.5.1. До практикума

А. Что произойдет, если действием внешней силы задать пружинному маятнику начальное смещение из положения равновесия $x_{\max} > \Delta l_0$?

Б. Дать объяснение символов A , φ_0 и ω_0 в формуле (II.4).

В. Как привести маятник в колебание так, чтобы начальная фаза (φ_0 или φ_1) была равна 0, $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$? Как поступить, чтобы начальная фаза отличалась от этих значений?

Г. При каких начальных условиях в формуле (II.7) A_1 означает начальную амплитуду? Что означает эта величина при других начальных условиях?

Д. Почему произведение $A_1 e^{\gamma t}$ можно назвать амплитудой лишь условно даже в такие моменты времени, которым отвечает $\sin(\omega_1 t + \varphi_1) = 1$?

Е. Можно ли логарифмический декремент затухания колебаний определить не только через последовательные амплитуды, но и через немаксимальные смещения? Вывести зависимость между величинами θ , γ и периодом колебаний T_1 .

Ж. Почему при обработке результатов п. II.4.3 целесообразно по оси ординат откладывать не значение периода T , а его квадрат T^2 ? Какие величины следует в тех же целях откладывать по осям координат в п. II.4.4?

II.5.2. После практикума

3. Дать определение времени релаксации и добротности колебательной системы. Вычислить обе эти величины для нашего маятника при его колебании как в воздухе, так и в воде.

И. При достаточной точности опыта оказывается, что для малых значений массы точки прямой $T^2 = T^2(m)$ систематически отклоняются вверх. Точно также значение массы, определенное в п. II.4.4, оказывается больше номинального значения груза. Почему?

II.6. Литература

1. Tammets H. Füüsika praktikum: Metroloogia. - Tln.: Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Воолайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. - Тарту: ТТУ, 1987. - 60 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1973. - I. - §§ 62, 73.
4. Физический практикум: Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И. Ивероновой. - М.: Наука, 1967. - Зад.27.

12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ С ПОМОЩЬЮ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

12.1. Задание

Определение ускорения силы тяжести.

12.2. Принадлежности

Физический маятник – длинный металлический стержень с двумя прикрепленными к нему призмами, штатив или консоль, прикрепленная к стене, со шкалой для измерения угловых смещений, автоматическая установка для измерения времени и счета колебаний, металлическая измерительная лента или линейка.

12.3. Теоретическое введение

Физическим маятником может быть любое тело, могущее поворачиваться вокруг горизонтальной оси, центр масс которого не расположен на оси вращения. Такое тело находится в стабильном равновесии, когда центр масс его лежит на вертикали, проходящей через ось, ниже последней.

На рис. 12.1 горизонтальная ось вращения тела (физического маятника) проходит через точку O , C – центр масс; расстояние между этими точками R . Для описания движения такой системы с одной степенью свободы (см. дополнительное задание А) целесообразно выбрать в качестве обобщенной координаты системы угол поворота α из положения равновесия. Без учета сил трения единственным внешним моментом сил относительно оси вращения является момент собственной силы тяжести. Основное уравнение динамики (уравнение моментов) запишется в виде (см. дополнительное задание Б):

$$J\ddot{\alpha} = -mgR \sin \alpha, \quad (12.1)$$

где J — момент инерции маятника относительно оси вращения, m — масса маятника, g — ускорение силы тяжести. Отсюда получается дифференциальное уравнение движения физического маятника:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgR}{J} \sin \alpha = 0, \quad (12.2)$$

которое при малых значениях угла α ($\sin \alpha \approx \alpha$) сводится к уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgR}{J} \alpha = 0. \quad (12.3)$$

Решение этого уравнения, как известно, имеет следующий вид:

$$\alpha = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12.4)$$

где A — угловая амплитуда маятника, φ_0 — начальная фаза и ω_0 — круговая частота:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgR}{J}}. \quad (12.5)$$

Из последнего соотношения вытекает формула периода колебаний:

Рис. 12.1. Физический маятник.

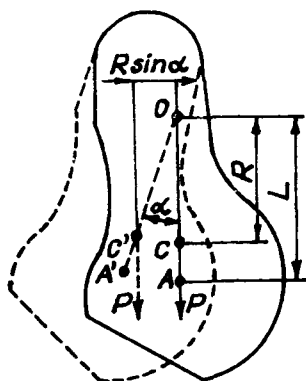
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgR}}. \quad (12.6)$$

Чтобы эта формула приняла вид, подобный формуле периода колебаний математического маятника, надо сделать следующее обозначение:

$$L = \frac{J}{mR}, \quad (12.7)$$

тогда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (12.8)$$



Величину L называют приведенной длиной физического маятника. Она равна длине такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

Точку, лежащую на прямой, проходящей через ось вращения и центр масс маятника и перпендикулярной оси, на расстоянии L от оси, называют центром качания. Для нахождения центра качания исходят из теоремы Штейнера:

$$J = J_0 + m R^2, \quad (12.9)$$

где J_0 — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной прежней. Подставив отсюда J в формулу (12.7), получают:

$$L = \frac{J}{mR} = \frac{J_0}{mR} + R. \quad (12.10)$$

Из формулы (12.10) видно, что $L > R$, т.е. центр качания всегда находится ниже центра масс (точка A на рис.12.1).

Если закрепить тело в его центре качания так, чтобы оно могло поворачиваться вокруг оси, параллельной прежней, то приведенная длина маятника останется прежней (см. дополнительное задание Г). Если не изменится приведенная длина маятника, то останется прежним и период его колебаний (см. формулу (12.8)). Это обстоятельство делает возможным опытное определение приведенной длины.

С помощью физического маятника можно решить ряд практических задач, например:

1) определять моменты инерции тел относительно заданных осей. Для этого надо закрепить тело так, чтобы оно могло свободно поворачиваться вокруг этой оси, и измерить период колебаний. Затем найти ось, параллельную предыдущей и проходящую через центр масс (тело находится в безразличном равновесии), расстояние между этими осями равно R . По формуле (12.6) вычислить момент инерции;

2) определять ускорение силы тяжести (напряженность гравитационного поля Земли). Для этого надо измерить приведенную длину маятника и соответствующий ей период колебаний и по формуле (12.8) вычислить значение g .

12.4. Описание установки и метода измерений

В настоящей работе для определения ускорения силы тяжести применяется оборотный маятник, представляющий собой длинный ($\ell = 1$ м) тонкий металлический стержень, снабженный двумя опорными призмами (рис. 12.2). Призмы A и B можно укреплять на стержне в произвольных его точках, для фиксации призм на стержне высверлены ямочки на расстоянии приблизительно 10 мм друг от друга. Призмы опираются (поочередно) в паз пластины C , которая, как и сами призмы, в целях уменьшения трения изготовлена из закаленной стали.

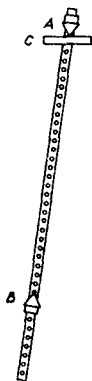


Рис. 12.2. Оборотный маятник.

Ясно, что перемещением призм можно найти такое их положение, при котором период колебания маятника при опоре на обе призмы будет одинаков. В таком случае расстояние между ребрами и будет равно приведенной длине маятника. Здесь, однако, надо заметить, что в случае тела, симметричного относительно центра масс (в нашем случае длинного стержня), можно найти четыре положения оси вращения, при которых период колебаний одинаков. Центр качания, отвечающий данной оси, должен находиться по другую сторону центра масс, но не симметрично относительно его.

В случае оборотного маятника одну из призм оставляют в одном и том же положении относительно стержня, ее называют неподвижной (A). Положение, при котором стержень опирается призмой A , называют прямым. Другую призму (B) в ходе опыта перемещают, это подвижная призма. Положение, в котором на пластину опирается призма B , называют обратным.

Вначале, когда обе призмы находятся на равных расстояниях от концов стержня, период колебаний T (или время N

колебаний) в обоих положениях одинаков. При перемещении подвижной призмы в сторону центра масс период колебаний в прямом положении маятника изменяется мало; он немного уменьшается, так как момент инерции системы стержень + призма изменяется быстрее, чем положение центра масс (в формуле (12.6) \mathcal{I} уменьшается быстрее, чем R). В обратном положении период вначале уменьшается (\mathcal{I} уменьшается довольно быстро), позднее же при приближении подвижной призмы к центру масс начинает быстро расти ($R \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$). Графики зависимости периода колебаний T (или t_N) от расстояния χ между ребрами призм в прямом и обратном положениях маятника пересекаются; координаты точки пересечения χ^* и T^* (или t_N^*) и определяют приведенную длину маятника и отвечающий ей период колебаний.

Точку пересечения кривых можно найти графически. Большой точности, однако, можно достичь путем сближения зависимостей $t_N^{np} = \phi^{np}(\chi)$ (в прямом положении маятника) и $t_N^{of} = \phi^{of}(\chi)$ (в обратном его положении) с помощью соответствующей регрессионной функции и путем нахождения χ^* как решения уравнения $\phi^{np}(\chi) = \phi^{of}(\chi)$. В настоящей работе пользуются последним приемом; вычисления производятся на ЭВМ. Точность результата определяется здесь в основном точностью измерения периода колебаний. В целях увеличения точности целесообразно измерять время большого числа N колебаний. При измерениях вручную отсчет большого числа колебаний требует большого внимания, причем вероятность ошибиться велика. Поэтому в работе для измерения t_N применяется электронный секундомер, снабженный фотореле и счетчиком колебаний. Секундомер управляется генератором, частота которого стабилизируется кварцевым резонатором, показание снимается с номерного табло, единица наименьшего порядка которого равна 0,1 с. Так как точность частоты кварцевого резонатора очень велика (относительная погрешность $E_f \leq 10^{-5}$), то допустимая погрешность секундомера определяется погрешностью дискретизации 0,1 с (по своей природе это случайная погрешность) (см. дополнительное задание Д).

Датчик фотореле прикреплен к пластине \mathcal{C} , на которую опирается призма (рис. 12.2), световой поток от лампочки

датчика прерывается при качании маятника проволочной стрелкой, прикрепленной к призме. Число колебаний N , нужное для достижения достаточной точности, которое вычисляется по методу, описанному в следующем пункте, устанавливается с помощью переключателей на передней панели секундомера (один тумблер и два дисковых переключателя). Они позволяют набрать произвольное число колебаний в промежутке $1 \dots 199$. Табло секундомера зануливается нажатием на кнопку **NULL**. Это следует делать в момент, когда колеблющийся маятник пришел в амплитудное положение. Пуск секундомера происходит автоматически, когда маятник проходит положение равновесия и останавливается он в том же положении маятника после совершения N колебаний. Секундомер может быть пущен снова после зануливания табло.

12.5. Планирование опыта

Измерять в настоящей работе приходится период колебаний и расстояние между ребрами призм χ . Планирование сводится здесь к выбору нужной точности измерения этих величин (допустимой погрешности), а также нужного числа точек для построения кривых.

При построении регрессионных зависимостей основным является требование, чтобы аргумент был измерен точнее, чем функция в том смысле, чтобы ширина коридора погрешностей регрессионной кривой определялась разбросом значений функции. Поэтому величину χ надо измерять по возможности точнее (в пределах имеющихся возможностей). В наших условиях для измерения длин в пределах 1 м наиболее точным прибором является штангенциркуль с точностью нониуса 0,1 мм и пределом измерения 800 мм. Так как призмы можно закреплять с помощью винтов и углублений в стержне тоже с точностью по меньшей мере до 0,1 мм, то расстояния χ для трех положений неподвижной призмы измерены и даются в виде таблицы. Это позволяет экономить время.

Регрессионная кривая сглаживает случайные погрешности опыта тем лучше, чем больше число степеней свободы $m - K - 1$. Здесь m — число опытных точек, K — число посто-

янных, содержащихся в регрессионной функции и определяемых по данным опыта. В данном случае $K = 3$ (см. п. 12.7). Достаточно хороший результат получится при $m = (10 \dots 15)$. Абсолютная предельная погрешность времени колебаний в нашем опыте определяется суммой допустимой основной погрешности секундомера (0,1 с) и случайной погрешности, возникающей вследствие возможного разброса времени реакции фотореле. Ни та, ни другая из этих погрешностей не зависит от длины измеряемого промежутка времени, поэтому точность измерения периода можно повысить (относительную предельную погрешность понизить) удлинением промежутка времени (увеличением числа колебаний). В качестве критерия для оценки нужного числа колебаний примем требование, чтобы относительная погрешность измерения времени была возможно малой, но все-таки в некоторое число K раз больше максимальной относительной погрешности измерения расстояния между ребрами призмы:

$$\frac{\Delta t}{N \cdot T} = K \frac{\Delta x}{x}. \quad (12.11)$$

На основе вышесказанного возьмем $\Delta x = 0,1$ мм, $x \approx 600$ мм. Если подвижная призма находится не очень близко к середине стержня, то период слабо зависит от положения призмы. Поэтому можно для планирования опыта измерить T при произвольном положении подвижной призмы в любом, прямом или обратном положении маятника. Закрепив подвижную призму в произвольном углублении, измеряют время 10 колебаний 10 раз.

Если случайная погрешность будет меньше погрешности дискретизации, выбирают $\Delta t = 0,1$ с. Вычисляя период колебаний, выбирают $K = 5 \dots 10$ и вычисляют N .

Однако при выборе числа колебаний надо принимать во внимание и суммарное время, имеющееся в распоряжении экспериментатора. Чтобы справиться с работой в течение времени, отведенного для практикума, суммарное время наблюдения колебаний в основных измерениях $2mt_N = 2mNT$ не должно превышать 1 час. Допустимое число колебаний N' вычисляется из этого критерия:

$$2mN'T(c) = 3600. \quad (12.12)$$

Для работы выбирают из чисел N и N' меньшее.

12.6. Ход работы

12.6.1. С помощью винтовых ножек приводят штатив по отвесу в вертикальное положение, плита C (рис. 12.2) придет тогда в горизонтальное положение. (Если экспериментальная установка прикреплена к стене с помощью консоли, то этого делать не надо, плита в этом случае уже установлена горизонтально.)

12.6.2. Неподвижную призму закрепляют на стержне в положении, указанном руководителем практикума (в одном из положений, для которых заданы значения χ), а подвижную призму — на таком же расстоянии от другого конца стержня. Устанавливают маятник в прямом его положении (неподвижная призма опирается на пластину C) и оставляют в положении равновесия. Включают секундомер и приводят (изгибая его) прикрепленный к призме проволочный указатель в такое положение, чтобы он наилучшим образом перекрывал световой поток лампы. В ходе работы следует положение указателей проверять при каждом повороте маятника.

12.6.3. После прогрева секундомера в течение по меньшей мере 10 минут после включения его в сеть приводят маятник в колебание с наименьшей амплитудой, при которой в амплитудных положениях маятника световой поток открывается полностью. Измеряют 10 раз время 10 колебаний t_{10} (для планирования эксперимента, согласно п. 12.5). Для этого набирают на панели секундомера нужное число колебаний 10 и зануливают табло секундомера (в амплитудном положении маятника). Зануливание повторяют 10 раз, не останавливая маятника. Здесь и позднее измерение следует начинать не сразу после приведения маятника в колебание (начального толчка), а спустя примерно 10 колебаний, чтобы успели затухнуть боковые колебания могущие возникнуть при начальном толчке.

12.6.4. Вычисляют нужное число полных колебаний N (по формулам (12.11) и (12.12)) и набирают его на панели секундомера с помощью переключателей.

12.6.5. Определяют опытным путем максимально допустимую амплитуду конца маятника. Для этого начинают с минимально возможной амплитуды, при которой световой поток лампы еще полностью открывается, регистрируют угловую амплитуду маятника по предназначенной для этого шкале, приводят маятник в колебание без толчка (освободив его в амплитудном положении) и измеряют время N колебаний. Повторяют эту операцию, увеличивая каждый раз начальное отклонение маятника на 1° , до тех пор, пока не обнаружится изменение периода, измеримое нашим секундомером. При основных измерениях начальное отклонение маятника должно быть несколько меньше последнего его значения в предварительных опытах.

12.6.6. Измеряют время N колебаний в обоих положениях маятника. Затем перемещают подвижную призму в сторону центра масс на две ямочки и снова измеряют время N колебаний. Повторяют это до тех пор, пока значение t_N не станет в обратном положении маятника больше его значения в начале опыта, когда призмы находились на равных расстояниях от концов стержня. Опытных точек должно получиться 13...15. Если это не так, измеряют t_N еще несколько раз в промежуточных точках, предпочтительно вблизи точки пересечения кривых (т.е. там, где $t_N^{np} \approx t_N^{ob}$). Во избежание промахов каждый раз после перемещения призмы измеряют ориентировочно расстояние между ребрами призм с помощью измерительной ленты. Результаты этих основных измерений оформляют в виде таблицы (см. дополнительное задание Е).

12.6.7. Экспериментальные точки наносят на плоскость x, t_N (на миллиметровой бумаге) и проводят по ним на глаз плавную кривую. Если некоторые точки окажутся подозрительно далеко от кривой, то следует повторить измерения в этих точках. Определяют приближенное значение абсциссы точки пересечения кривых $x_0 = L_0$ (это необходимо как начальное приближение для численного решения уравнения $\varphi^{np}(x) = \varphi^{ob}(x)$ на ЭМ).

12.6.8. Обработывают данные измерений на ЭМ в диалоговом режиме. По результатам, выданным ЭМ, строят (на

миллиметровой бумаге) регрессионные кривые $t_N^{np} = f^{np}(x)$ и $t_N^{ob} = f^{ob}(x)$ (см. п. 12.4). В этих же осях откладывают и экспериментальные точки.

12.6.9. ЭМ печатает среднеквадратичное отклонение отдельных точек от регрессионной кривой S_x для обеих кривых (формула (12.16)). Вычисляют предельную погрешность функции в произвольно выбранной точке кривой:

$$\Delta t_N = \frac{S_x \cdot t_{m-k-1, p}}{\sqrt{m}} + E_f t_N. \quad (12.13)$$

Здесь $t_{m-k-1, p}$ коэффициент Стьюдента, выбранный на уровне доверительной вероятности p , с числом степеней свободы $m-k-1$, E_f — допустимая погрешность внутреннего генератора секундомера (см. п. 12.4). Затем строят коридор погрешностей, проверяют, не выходит ли за пределы коридора погрешностей предельная погрешность $\Delta x = 0,13$ мм (почему не 0,1 мм?) вблизи какой-либо точки x . Определяют предельную погрешность длины ΔL по криволинейному четырехугольнику, образуемому при пересечении коридоров погрешностей, и сравнивают ее с тем, что напечатала ЭМ. При этом следует принять во внимание, что последний результат является стандартным отклонением, его надо умножить на $\frac{t_{m-k-1, p}}{\sqrt{m}}$ (см. формулу (12.13)). По требованию руководителя практикума выполняют дополнительное задание И.

12.6.10. Представляют ускорение силы тяжести и его предельную погрешность, округленные должным образом.

12.7. Описание алгоритма вычислений

Для приближения функций $t_N^{np} = f^{np}(x)$ и $t_N^{ob} = f^{ob}(x)$ (см. п. 12.4) в алгоритме используется полиномиальная регрессия [1, п. 30.11]. Оказывается, что в качестве приближений функций $f^{np}(x)$ и $f^{ob}(x)$ достаточно удобны многочлены:

$$f^{np}(x) = A_1 + A_2 x + A_3 x^2, \quad (12.14)$$

$$f^{od}(x) = B_1 + B_2 x + B_3 x^2. \quad (12.15)$$

Как решение регрессионной задачи получаются такие значения постоянных A_i и B_i , при которых сумма квадратов отклонений опытных точек от кривых $t_N^{np} = f^{np}(x)$ и $t_N^{od} = f^{od}(x)$ в направлении оси t_N минимальна. Точность вычислений на ЭВМ ограничена, поэтому погрешность вычислений при решении полиномиальной регрессионной задачи может оказаться значительной. Для повышения точности вычислений можно изменить масштаб начальных данных. Проблема погрешностей вычислений становится острой тогда, когда значения аргумента или функции (или и аргумента и функции) достаточно велики и покрывают определенный интервал числовой оси. В таком случае целесообразно вычесть из всех чисел некоторую постоянную, значение которой находится в середине области изменения числового множества; полученные результаты будут тогда числами, близкими к нулю. В регистрах ЭВМ тогда не тратятся биты для формирования больших целых чисел, точность вычислений значительно возрастает.

Алгоритм приводит начальные данные к следующему виду:

$$\begin{aligned} t'_N &= t_N - c_t, \\ x' &= x - x_\infty, \end{aligned}$$

где c_t — среднее арифметическое времен, а x_∞ — такое расстояние между ребрами призм, при котором $T^{od} \rightarrow \infty$. Значение x_∞ выбирается приблизительно равным 0,5 м (см. дополнительное задание 3). Регрессионная задача решается с переменными t'_N и x' . Вычисляются среднеквадратичные отклонения s_t^{np} и s_t^{od} отдельных точек по формуле:

$$s_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m [t'_{Ni} - f(x'_i)]^2}{m - k - 1}} \quad (12.16)$$

Далее решают уравнение $f^{np}(x') = f^{od}(x')$ методом итераций [4,

с. 407]. Для этого представляют его в виде:

$$x' = \frac{B_2}{A_1 - B_1 + (A_2 - B_3)x' + 4A_3x'^2} = \gamma(x'),$$

подставляют начальное приближение $x_0 - x_\infty = x'_0 (x_0 = L_0)$ в правую половину выражения и вычисляют следующее приближение $x'_1 = \gamma(x'_0)$, далее $x'_2 = \gamma(x'_1)$ и т.д. до тех пор, пока $x'_j = x'_{j-1}$ (в пределах точности вычислений). Теперь считают, что

$$x'_j + x_\infty = x^* = L$$

(приведенная длина). Из формул (12.14) или (12.15) вычисляют время N колебаний, отвечающее найденной приведенной длине:

$$t_N^* = c_t + f^{\text{об}}(x'_j) \quad \text{или} \quad t_N^* = c_t + f^{\text{пр}}(x'_j).$$

Ускорение силы тяжести g вычисляют по формуле:

$$g = 4\pi^2 N^2 \frac{L}{t_N^{*2}}. \quad (12.17)$$

При вычислении предельной погрешности Δg можно исходить из того, что точка пересечения кривых с уровнем доверительной вероятности p остается в кривостороннем четырехугольнике, возникшем при пересечении коридоров погрешностей (на рис. 12.3, заштрихованная область). В алгоритме полушириной коридора погрешностей считают величину $\Delta t / \sqrt{m}$ (см. формулы (12.16) и (12.13)). Это значит, что кривая действительной регрессионной функции остается внутри такого коридора на сравнительно низком уровне доверительной вероятности, приблизительно 70 %. Пределы коридора погрешностей получаются путем прибавления и вычитания полуширины коридора погрешностей к функциям $f^{\text{пр}}(x)$ и $f^{\text{об}}(x)$. Предельная погрешность ускорения g вычисляется по формуле (12.17), считая L и t_N^* независимыми. Полученная таким путем оценка погрешности значительно превышает отрогую оценку, учитывающую зависимость величин L и t_N^* . Получение более строгой оценки слишком трудоемко. Δg получается таким

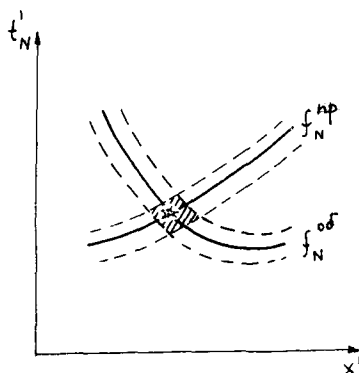


Рис. 12.3. Определение предельной погрешности ускорения силы тяжести.

путем тоже на низком уровне доверительной вероятности. Для получения предельной погрешности на более высоком уровне доверительной вероятности надо это значение Δg умножить на соответствующий коэффициент Стьюдента [1, табл. 35.2.2; 2, табл. 4.2].

Задача обработки данных решается на ЭВМ в диалоговом режиме. В ответ на вопросы ЭВМ вводят с помощью клавиатуры свою фамилию, использованное число колебаний N , число опытных точек m , начальное приближение приведенной длины L_0 (м), расстояния между ребрами призм $x_{(m)}^{(p)}$ (m чисел), времена N колебаний в прямом положении t_N^{hp} (с) (m чисел) и обратном положении t_N^{od} (с) (m чисел). Весь последующий диалог происходит под руководством ЭВМ.

12.8. Дополнительные задания

12.8.1. До практикума

А. Что понимают под числом степеней свободы механической системы? Какое число степеней свободы имеет шар, подвешенный на нити, и вертикальный пружинный маятник?

Б. Написать скалярное уравнение моментов в общем виде и объяснить вывод уравнения движения (12.1). Почему здесь в правой половине стоит знак минус?

В. Показать, что отношение $\frac{J}{mR}$ (формула (12.7)) имеет размерность длины.

Г. Доказать, исходя из рис. 12.1 и пользуясь теоремой Штейнера и формулами (12.7) и (12.10), что приведенная длина физического маятника не изменится, если маятник закрепить в центре качания так, что он может поворачиваться вокруг оси, параллельной прежней.

Д. Найти такое предельное значение промежутка времени, выше которого уже нельзя утверждать, что допустимая погрешность секундомера определяется погрешностью дискретизации 0,1 с (см. п. 12.4), т.е. надо учесть еще и допустимую погрешность частоты кварцевого генератора. Что понимают под термином погрешность дискретизации цифровых измерительных приборов?

Е. Сделать набросок формы таблицы для оформления результатов основных измерений.

12.8.2. После практикума

Ж. Согласно п. 12.6.5 определили максимальную допустимую угловую амплитуду. При работе с большими значениями амплитуды и использовании упрощенной (линеаризованной) формулы периода (12.6) возникает методическая погрешность. Значение относительной методической погрешности можно оценить как отношение изменения времени N колебаний при увеличении амплитуды выше допустимого значения к самому этому времени.

В результате решения точного дифференциального уравнения движения физического маятника (12.2) получается формула периода в виде бесконечного ряда:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgR}} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \right).$$

При колебаниях с малой амплитудой в этой формуле опускаются все члены, начиная со второго. Методическая погрешность в первом приближении определяется вторым членом ряда, относительная методическая погрешность выразится тогда в

виде:

$$\frac{\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{1} = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}.$$

Найти значение угловой амплитуды α_0 , когда методическая погрешность при пользовании формулой (I2.6) не превышает значения, полученного на основе опытных результатов. Сравнить значение максимальной допустимой угловой амплитуды, полученное таким путем, со значением, найденным в опыте.

3. Обработывая результаты измерений, при масштабировании данных из времен t_N вычитают их среднее арифметическое, а из расстояния x между ребрами призм x_∞ , которое не находится в середине числового множества (см. п. I2.7). Объяснить на основе анализа массива данных t_N и x , почему так поступают.

И. Найти предельную погрешность ускорения силы тяжести с учетом зависимости величин L и t_N^* , определяемой по точке пересечения кривых, пользуясь графиком, построенным по п. I2.6.9. (Разъяснение – точка пересечения кривых находится в области пересечения коридоров погрешностей в неизвестной нам точке, но ΔL и Δt_N^* обе определяются этой точкой.)

I2.9. Литература

1. Таммет Н. Füüsika praktikum: Metroloogia. – Тлн.: Valgus, 1971. – 240 lk.
2. Воодайд Х. Оценка ошибок измерений в физическом практикуме. – Тарту: ТГУ, 1987. – 60 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1973. – I. – § 67.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975, – 631 с.
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: Наука, 1974, – I. – § 4I.

13. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА ПОЛЯ

13.1. Задание

Определение резонансных кривых затухающих колебаний механической системы при разных степенях затухания.

13.2. Принадлежности

Крутильный маятник Поля, звуковой генератор, блок питания и усиления, электронный секундомер с фотодатчиком.

13.3. Теоретические основы

Каждая система, имеющая положение устойчивого равновесия, при выводе из которой возникают силы, возвращающие систему в состояние равновесия, имеет одну или несколько собственных частот колебаний, с которыми она начинает колебаться после однократного толчка. Действием внешней периодической силы можно такую систему заставить (вынудить) колебаться с любой частотой. Такие колебания называют вынужденными.

В настоящей работе исследуются вынужденные колебания крутильного маятника, вызванные гармонически изменяющимся моментом внешних сил. Момент внешних сил $M_1 = M_0 \sin \omega_1 t$, где M_0 — амплитудное значение момента, а ω_1 — его круговая частота. На маятник, выведенный из положения равновесия, действует еще момент силы, обусловленный упругостью пружины и стремящийся повернуть маятник обратно в положение равновесия, $M_2 = -D\alpha$, где α — угол поворота, а D — коэффициент пропорциональности. Величина D равна моменту силы, действующему при угле поворота в 1 радиан. На крутильный маятник действует еще момент сил сопротивления. Если он прямо пропорционален скорости, то $M_3 = -h\dot{\alpha}$, где h — коэффициент сопротивления.

Исходя из этих данных, можно написать дифференциальное уравнение движения маятника (уравнение моментов относительно оси):

$$J\ddot{\alpha} = -D\alpha - h\dot{\alpha} + M_0 \sin \omega_1 t, \quad (13.1)$$

где J — момент инерции маятника.

Полное решение этого уравнения следующее:

$$\alpha = A_0 e^{-\mu t} \cos(\omega' t + \varphi_0) + B \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (13.2)$$

где $\mu = h/2J$ — коэффициент затухания, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ — круговая частота свободных затухающих колебаний, $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$ — круговая частота собственных колебаний (в условиях полного отсутствия затухания), A_0 и φ_0 — начальная амплитуда и начальная фаза собственных колебаний, B — амплитуда вынужденных колебаний, φ — разность фаз между смещением вынужденных колебаний и моментом внешних сил.

По истечении некоторого времени после начала колебаний свободные колебания затухают полностью, остаются только вынужденные колебания, смещение которых выразится следующим образом:

$$\alpha = B \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (13.3)$$

где

$$B = \frac{M_0}{J \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\mu^2 \omega_1^2}}, \quad (13.4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{2\omega_1 \mu}{\omega_0^2 - \omega_1^2}. \quad (13.5)$$

Из формулы (13.4) видно, что амплитуда вынужденных колебаний принимает максимальное значение, когда частота момента внешних сил имеет значение

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\mu^2. \quad (13.6)$$

Такое явление, при котором вынужденные колебания происходят с максимальной амплитудой, называется резонансом, а частота $\omega_{\text{рез}}$ — резонансной частотой.

Из формулы (I3.5) можно видеть, что 1) если $\omega_1 \ll \omega_0$, то $\varphi \approx 0$, т.е. фаза вынужденных колебаний почти совпадает с фазой момента внешних сил; 2) если $\omega_1 \approx \omega_0$, то $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$, т.е. в условиях резонанса фаза вынужденных колебаний отстает на четверть периода от фазы момента внешних сил; 3) если $\omega_1 \gg \omega_0$, то $\varphi \approx -\pi$, т.е. фаза вынужденных колебаний отстает от фазы момента внешних сил на половину периода.

Графики функций $A = A(\frac{\omega_1}{\omega_0})$ и $\varphi = \varphi(\frac{\omega_1}{\omega_0})$ называются соответственно амплитудной и фазовой резонансными кривыми.

I3.4. Описание экспериментальной установки

В настоящей работе для исследования вынужденных колебаний используется установка (рис. I3.1), сконструированная Полем. Металлический диск A с вырезами, могущий поворачиваться вокруг горизонтальной оси O , и спиральная пружина B , прикрепленная одним концом к диску, образуют колеблющуюся систему – крутильный маятник. Другой конец пружины прикреплен к рычагу K , который тоже может поворачиваться вокруг оси O . Нижний конец рычага соединен шарнирно с шатуном C , другой конец которого в свою очередь соединен шарнирно с эксцентриком D , на валу электромотора. Такая система передачи превращает вращательное движение вала мотора в гармонические крутильные колебания рычага K вокруг оси O . Так как конец пружины прикреплен к такому гармонически колеблющемуся рычагу, то рычаг действует на крутильный маятник с моментом силы, изменяющимся во времени синусоидально. Амплитуду этого момента можно регулировать, изменяя расстояние между шарниром эксцентрика и валом мотора.

Для измерения амплитуды колебаний диска к нему прикреплена стрелка E , а позади диска установлена круговая шкала S . Для приближенной оценки фазы момента внешних сил к рычагу K прикреплена стрелка F , движущаяся по той же шкале.

В качестве мотора используется синхронный мотор, снабженный для уменьшения частоты вращения шестеренным редукто-

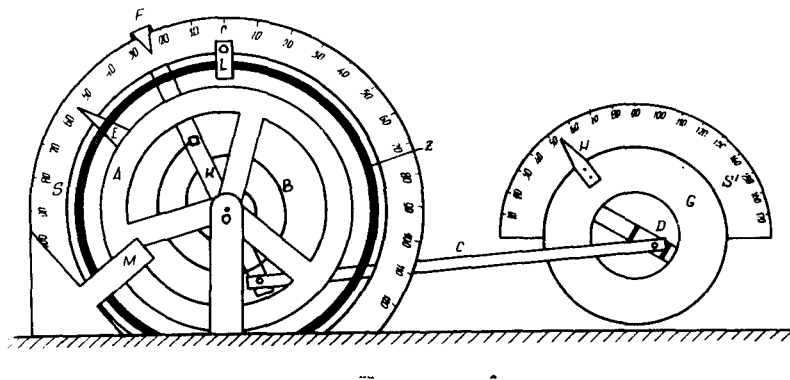


Рис. 13.1. Крутильный маятник Поля для изучения вынужденных колебаний.

ром, угловая скорость вращения вала которого (а также и выходного вала редуктора) зависит от частоты переменного тока, питающего мотор. Мотор, рассчитанный первоначально на частоту 50 Гц, может работать в относительно широком диапазоне частот — 20...120 Гц. На более низкой частоте он просто останавливается; при увеличении же частоты скорость вращения на некоторой предельной частоте питания уменьшается скачком в два раза. Питает мотор напряжением изменяемой частоты от звукового генератора через усилитель мощности, находящийся в блоке питания и усиления. Блок питания и усиления соединяется с экспериментальной установкой посредством разъема, для присоединения звукового генератора на передней панели блока имеются специальные клеммы. На усилитель мощности следует подать переменное напряжение примерно 1 В (при большем напряжении усилитель дает искажения). Для нахождения подходящего напряжения на вход усилителя на передней панели блока питания и усиления имеется индикатор, стрелка которого во время работы должна находиться в области "ХОРОШО".

Коэффициент затухания колебаний крутильного маятника можно изменять с помощью электромагнита M (рис. 13.1), между полюсами которого диск A движется. При движении в магнитном поле в диске возникают вихревые токи, тормозящие движение диска тем больше, чем сильнее магнитное поле. Напряженность магнитного поля можно регулировать изменением силы тока в обмотках магнита. Магнит питается от стабилизатора, находящегося в блоке питания и усиления; рукоятка потенциометра регулировки тока в магните и амперметр, измеряющий силу этого тока, находятся на передней панели блока. Сила вихревых токов прямо пропорциональна скорости движения, поэтому и момент сил сопротивления прямо пропорционален угловой скорости маятника, что и предполагалось, при записи уравнения (13.1). Сухое трение в подшипниках, однако, не согласуется с этим соотношением, поэтому на низких частотах колебания маятник не подчиняется приведенной здесь теории (см. дополнительное задание Ж).

Для измерения разности фаз между смещением крутильного маятника и моментом внешних сил служат два датчика и управляемые ими лампы. Фотоэлектрический датчик состоит из освещен-

тительной лампы L , прикрепленной к кольцу Z , и фото-
 диода, укрепленного на задней стороне шкалы S' . Этот дат-
 чик расположен около нуля шкалы; вспышками расположенной
 на основании неоновой лампы он регистрирует моменты време-
 ни, когда маятник проходит через положение равновесия, т.е.
 значения фазы углового смещения $n\pi$, где $n = 0, 1, 2 \dots$
 Второй датчик представляет собой нормально разъединенную
 пару механических контактов, расположенных на задней сторо-
 не кольца, концентричного с валом мотора, которые в тече-
 ние одного оборота вала мотора соединяет один раз между со-
 бой кулачок на кольце, прикрепленном к валу. Кольцо G с
 парой контактов на нем можно стрелкой H поворачивать от-
 носительно шкалы S' на 180° . Положение кулачка, замыкаю-
 щего контакты, на валу мотора подбирается так, чтобы при
 положении стрелки H на нуле шкалы S' контакты замкну-
 лись и вторая неоновая лампа на основании зажглась в момент,
 когда стрелка F рычага K проходит нуль шкалы S' , т.е.
 фаза момента внешних сил равна нулю (вернее $2n\pi$, где
 $n = 0, 1, 2 \dots$). Поворачивая кольцо G , можно с помощью
 второй неоновой лампы подбирать моменты времени, в которые
 фаза внешнего момента имеет любое значение в промежутке
 $0 \dots 180^\circ$. Лампа, соединенная с фотоэлектрическим датчиком,
 всегда регистрирует нулевую фазу маятника, поэтому при ус-
 тановке кольца G так, что обе лампы загораются одновремен-
 но, стрелка H будет показывать на шкале S' разность фаз φ
 между моментом внешних сил и угловым смещением маятника
 (левая неоновая лампа загорается два раза в течение перио-
 да колебаний диска A , только один из этих двух моментов
 загорания может совпадать с моментом загорания правой лам-
 пы). Сигнал пуска и остановки электронного секундомера бе-
 рется от усилителя фототока фотоэлектрического датчика. Ин-
 струкция к секундомеру выдается для пользования на месте.

На основании установки имеются три тумблера для вклю-
 чения и выключения мотора, магнита и мигающих ламп.

13.5. Ход работы

13.5.1. Проверяют исправность установки. Для этого со-
 единяют блок питания и усиления со звуковым генератором и

установкой и включают его, а также звуковой генератор, в сеть. С помощью тумблеров выключают мотор и магнит и включают лампы. Устанавливают стрелку H на нуль шкалы S' . Поворачивают, держа рукой за эксцентрик D , вал редуктора мотора до тех пор, пока не загорится правая лампа на основании установки. Стрелка F должна теперь стоять на нуле шкалы S . Если это не так, надо стрелку немного подогнуть. При этом положении вала мотора покоящийся диск A должен располагаться так, чтобы стрелка E тоже была на нуле, т.е. тень конца стрелки закрывала отверстие для фотодиода. (Левая неоновая лампа не горит, ибо управляющая ею электронная схема зажигает лампу после перекрывания фотодиода только в течение короткого времени.) Если это не так, надо освободить конец спиральной пружины, прикрепленный к рычагу K , и отрегулировать длину пружины.

Для контроля включают мотор. Амплитуды стрелки F в обе стороны должны быть одинаковыми. Если это не так, надо обратиться к руководителю практикума или к лаборанту, который отрегулирует положение кольца с кулачком на валу мотора. После этого, естественно, надо снова проверить нулевое положение диска A .

13.5.2. Определяют приближенно частоту собственных колебаний диска ω_0 , сообщив маятнику рукой начальное отклонение и пользуясь электронным секундомером. При пользовании секундомером используют табло с точностью до 0,01 с. Измерения повторяют три раза, задавая каждый раз одинаковые начальные отклонения (желательно в пределах 30-50 делений — см. дополнительное задание Е). Если расхождение результатов не превышает погрешности дискретизации секундомера (0,01 с), то в дальнейшем в целях экономии времени измеряют частоту колебаний через измерение времени одного колебания (периода).

Почему здесь измерение частоты ω_0 названо приближенным (см. дополнительное задание Ж)?

13.5.3. Определяют резонансную частоту $\omega_{рез}$ и резонансную амплитуду $B_{рез}$. Для этого устанавливают стрелку H на делении шкалы 90° и изменяют (при выключенном магни-

те) частоту вращения мотора до тех пор, пока обе лампочки не загорятся одновременно. Так как разность фаз $\varphi = 90^\circ$ при $\omega_1 = \omega_0$, а $\omega_{рез} \lesssim \omega_0$, то значение $\omega_{рез}$ уточняют, уменьшая (совсем немного) частоту звукового генератора до тех пор, пока амплитуда колебаний диска A не достигнет максимума. Измеряют период в условиях резонанса.

Теперь и в дальнейшем прежде чем производить измерения амплитуды и периода, следует выждать, чтобы затухли свободные колебания (см. дополнительное задание Б).

Определяют значения амплитуды B , периода T и сдвига фаз φ еще по меньшей мере при шести различных значениях частоты вынуждающего момента сил. φ определяется по шкале δ' , добившись поворотом стрелки H одновременности всплеск ламп. Частоты вынуждающего момента надо выбрать так, чтобы половина из них была меньше, половина — больше резонансной частоты. При этом следует использовать весь диапазон частот, в котором мотор работает. При слабом затухании (магнит выключен) надо следить, чтобы опытные точки оказались и в областях резкого подъема и спуска резонансных кривых.

ИЗ.5.4. Повторяют измерения согласно п. ИЗ.5.3 при двух значениях силы тока в обмотках электромагнита (одно из них должно быть максимально возможным значением).

ИЗ.5.5. Выключают мотор и определяют коэффициент затухания колебаний диска, при обоих использованных значениях силы тока в обмотках магнита. Для этого выводят диск максимально из положения равновесия и измеряют время $t_{n,n+m}$, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается от значения A_n (произвольно выбранная амплитуда, n -ое амплитудное положение диска после его освобождения) до значения A_{n+m} (m должно быть обязательно больше единицы, но A_{n+m} не должно быть очень малым, не меньше, чем $0,2 A_n$).

Для определения времени $t_{n,n+m}$ можно пользоваться тем же электронным секундомером, который применялся при измерении периода. Как это делать, выяснится после решения дополнительного задания Д. Коэффициент затухания опре-

делается по формуле:

$$\gamma = \frac{1}{t_{n,n+m}} \ln \frac{A_n}{A_{n+m}}. \quad (I3.7)$$

Измерения и вычисления повторяют по меньшей мере 5 раз и вычисляют среднее значение γ . Для решения дополнительного задания Ж вычисляют и γ_2 .

I3.5.6. По требованию руководителя практикума делают измерения, необходимые для решения дополнительного задания Е.

I3.5.7. Строят резонансные кривые для всех трех случаев затухания. Проверяют справедливость формулы (I3.6) в границах предельных погрешностей.

I3.6. Об оформлении протокола

Все результаты измерений следует оформить в виде таблиц. Форма таблицы для оформления результатов основных измерений (п. I3.5.3 и I3.5.4) должна быть такой, чтобы в ней уместились, кроме результатов прямых измерений (период колебаний T , амплитуда вынужденных колебаний B и разность фаз φ), все результаты вычислений (частота вынуждающего момента ω_1 , отношение ω_1/ω_0).

I3.7. Дополнительные задания

I3.7.1. До практикума

А. Вывести формулы (I3.6) и (I3.7).

Б. На основании чего можно судить, что собственные колебания уже затухли?

В. Начертить качественный вид амплитудных и фазовых резонансных кривых для системы с одной степенью свободы.

Г. Объяснить, почему в п. I3.5.1 требуется, чтобы амплитуды стрелки F были одинаковы в обе стороны.

Д. При определении коэффициента затухания (п. I3.5.6) приходится измерять время перехода диска из произвольного (n -го) амплитудного состояния (с амплитудой A_n) через m периодов в $(n+m)$ -ое амплитудное состояние (амплитуда A_{n+m}). Секундомер можно пускать и останавливать только в

моменты прохождения диском положения равновесия. Как можно использовать секундомер для измерения времени $t_{n,n+m}$?

13.7.2. После практикума

Е. Измеряя период свободных колебаний с различными начальными амплитудами, установить, зависит ли он от начального смещения. Если да, то как?

Ж. Определить коэффициент затухания γ_0 (без магнита) и показать, правомерно ли измерение ω_0 без учета затухания (т.е. отличается ли в пределах погрешности измерений значение частоты ω' , вычисленное по формуле $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0^2}$, от ω_0). В случае надобности вычислить уточненное значение ω_0 .

Въясняется, что и значение коэффициента затухания зависит от амплитуды колебаний диска. Чем это объясняется? Как связано с этим явлением "странное" поведение диска при малых частотах вынуждающей силы (при малых амплитудах)?

13.8. Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1973. – I. – § 75.
2. Физический практикум: Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И. Ивероновой. – М.: Наука, 1967. – Задача 28.
3. Стрелков С.А. Механика. – М.: Наука, 1975. – С.437–445.